平成29年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程(前期課程)
入学試験問題

基礎部門

以下の注意をよく読みなさい.

1. 試験開始の合図があるまでは, この問題冊子を開いてはならない.

2. 問題は線形代数, 微積分, 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学の6問があるが, その中から次の通り4問に解答すること.
   (1) <u>線形代数 および 微積分 の2問はともに必ず解答すること</u>.
   (2) <u>常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学の4問の中から2問を選択して解答すること</u>. 3問以上に解答した場合には無効となることがあるので注意せよ.

3. 答案用紙は, 予備1枚を含めて合計5枚ある.
   (1) 各問ごとに1枚ずつ答案用紙を用いよ.
   (2) 解答する問題の分野名(線形代数, 微積分, 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学のいずれか)を各答案用紙の問題番号欄に記入せよ.
   (3) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい.

4. 答案用紙には氏名を記入してはならない.

5. 問題用紙, 答案用紙(予備を含む)はすべて回収するので, 持ち帰らないこと.

問題は次のページから始まる.
このページは，下書きに用いてよい.

線形代数

2 次の正方行列 M を以下の関係を満足する行列とする．

$$M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad M\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

また，$P=M+M^{\mathrm{T}}$ とする．ただし，M^{T} は M の転置行列である．以下の問いに答えよ．その際，2 重根号があらわれても，それを外す必要はない．

(1) M を求めよ．

(2) $M\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ を求めよ．

(3) $M^4+aM^3+M^2+M+bE=O$ を満足する a，b を求めよ．ただし，E，O はそれぞれ 2 次の単位行列，零行列である．

(4) P を求めよ．

(5) 二次元直交座標系における 4 点 A，B，C，D の位置ベクトルをそれぞれ

$$\boldsymbol{x}_A=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_C=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_D=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

とする．さらに，$P\boldsymbol{x}_A$，$P\boldsymbol{x}_B$，$P\boldsymbol{x}_C$，$P\boldsymbol{x}_D$ を位置ベクトルとする点をそれぞれ A′，B′，C′，D′ とする．このとき，四角形 A′B′C′D′ の面積を求めよ．

(6) P の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(7) $P=USU^{\mathrm{T}}$ を満足する直交行列 U と対角行列 S を求めよ．

(8) $\boldsymbol{x}$ を 2 次元ベクトルとする．0 でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対するスカラー値関数 $f(\boldsymbol{x})$ を以下のように定める．

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$

このとき，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ に対する $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を求めよ．

微積分

(1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{1+x}}\,dx$$

ヒント：$\sqrt[3]{1+x}=t$と置き換えて考えよ．

(2) 次の無限区間の積分を求めよ．ただし$k>0$（kは実数）とする．

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\,dx$$

(3) 球面$x^2+y^2+z^2=a^2$のうち，円柱$x^2+y^2=ax\ (a>0)$の内部にある（円柱によって切り取られる）部分の面積を求めよ．

ヒント：xy平面に対して定義される有界閉領域Dにおける曲面$z=f(x,y)$上の面積Sは，以下の式で表される．

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

(4) x軸，y軸からなる二次元直交座標系（デカルト座標系）に互いに異なる点 $\mathrm{a}_1(x_1,y_1)$，…，$\mathrm{a}_n(x_n,y_n)$（nは2以上の整数）があるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{\mathrm{a}_k\mathrm{p}}\right)^2$ の極値を与えるこの座標系上の点$\mathrm{p}(x_\mathrm{p},y_\mathrm{p})$を求め，また，その値が極小であることを証明せよ．

ここで，$\overline{\mathrm{a}_k\mathrm{p}}$は，点$\mathrm{a}_k(x_k,y_k)$から点$\mathrm{p}(x_\mathrm{p},y_\mathrm{p})$までの線分の長さ，つまり，$\overline{\mathrm{a}_k\mathrm{p}}=\sqrt{(x_k-x_\mathrm{p})^2+(y_k-y_\mathrm{p})^2}$ で与えられるものとする．

常微分方程式

以下の問いに答えよ.

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2 \frac{dy}{dx} = xy + y^2$$

ヒント：$u = y/x$とする.

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 4\sin 4x$$

(3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$y\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

ヒント：$\dfrac{dy}{dx} = p$とする.

(4) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^2 + e^{x+y}}{x^2 y + e^{x+y}}$$

ベクトル解析

三次元直交座標系（デカルト座標系）において，x軸，y軸，z軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$として，以下の問いに答えよ．

(1) 円$(x-a)^2+z^2=r^2$ $(y=0,\ 0<r<a)$をz軸のまわりに回転してできる曲面について考える．

1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$を満たす媒介変数θ, φを用いてこの曲面を表せ．また，用いたθ, φの定義も図示せよ．

2) 問 1)の結果を利用して曲面の全表面積Sを求めよ．

(2) 円すい $x^2+y^2-z^2=0$と平面$z=2$に囲まれた領域の全表面をΩとし，この領域において，ベクトル場$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(xz)\boldsymbol{i}+(3xyz^2)\boldsymbol{j}+(6z)\boldsymbol{k}$を考える．このとき$\Omega$についての$\boldsymbol{F}(x,y,z)$ の面積分$\int_\Omega \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$は領域外部へ向かう方向を正の方向とするΩの単位法線ベクトルとする．

力学

長さ $2l$，質量 m の一様な棒 AB を考え，図 1 のように鉛直方向上向きを y 軸，水平方向右向きを x 軸とする．今，図 1(a)のように棒の一端 A を水平かつ滑らかな床の上に置き，y 軸となす角度αだけ傾けて時刻$t=0$で静かに離した．下記の設問に答えよ．ただし，重力加速度の大きさを g，棒の端 A にはたらく床からの垂直抗力を N，棒の重心まわりの慣性モーメントを I_G とし，棒に対する空気抵抗は無視できるものとする．

(1) 図 1 (b) のように，棒が y 軸となす角度がθ ($\alpha < \theta$) に到達したときを考える．

1) 棒の重心の座標を(x_G, y_G)としたとき，棒の重心に関する x 方向，y 方向の運動方程式を記せ．

2) 棒の重心まわりの回転の運動方程式を記せ．

3) I_G を l，m を用いて表せ．

4) 角加速度 $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ を力学的エネルギー保存の法則から求めよ．ただし，g，l，α，θ を用いて表すこと．

5) 垂直抗力 N を g，m，α，θ を用いて表せ．

(2) 棒の他端Bが床に到達する直前の棒の重心の加速度の大きさを，gを用いて表せ．

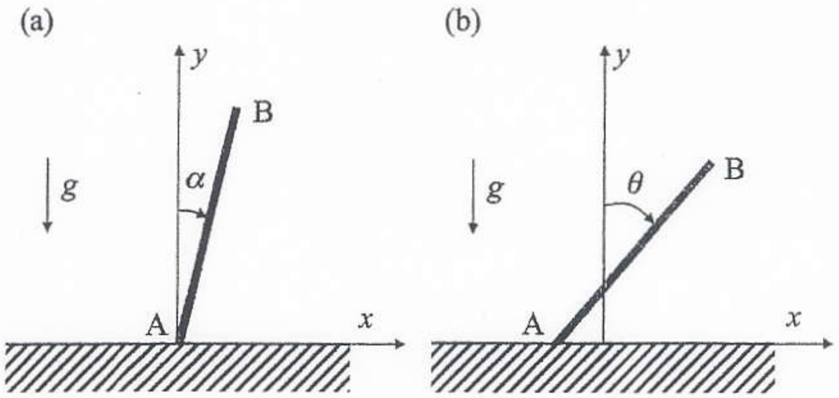

図1

電磁気学

真空の誘電率をε_0とする．以下の問いに答えよ．

(1) 真空中のxy平面上に置かれた太さを無視できる円形の導線に電荷Q (> 0)が一様に分布している．円の中心 O を原点，円の半径をa，円に垂直な軸をz軸とする．

1) 原点 O からみて微小角$d\theta$をなす微小円弧上にある電荷量を求めよ．

2) z軸上の任意の点 P（OP=z）において，円形の導線によって作られる電位ϕ_1を求めよ．ただし，電位の基準点を無限遠とする．

3) 2)の結果を用いて，点 P における電場E_1の大きさを求めよ．

(2) 真空中のyz平面上で$x = 0$の位置に無限に広がる薄い平板に，単位面積あたりσ（> 0）の電荷が一様に分布している．

1) 平板から距離x（> 0）の点における電場E_2の大きさを求めよ．

2) 1)の結果を用いて，平板から距離x（> 0）の点における，$x = 0$の位置との電位差ϕ_2を求めよ．

3) ϕ_2を縦軸に，xを横軸にとって，$x \geq 0$および$x < 0$の両領域について電位差ϕ_2を図示せよ．