平成28年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程（前期課程）
入学試験問題

基礎部門

以下の注意をよく読みなさい．

1. 試験開始の合図があるまでは，この問題冊子を開いてはならない．

2. 問題は線形代数，微積分，常微分方程式，ベクトル解析，力学，電磁気学の6問があるが，その中から次の通り4問に解答すること．
   (1) <u>線形代数　および　微積分　の2問はともに必ず解答すること</u>．
   (2) <u>常微分方程式，ベクトル解析，力学，電磁気学の4問の中から2問を選択して解答すること</u>．3問以上に解答した場合には無効となることがあるので注意せよ．

3. 答案用紙は，予備1枚を含めて合計5枚ある．
   (1) 各問ごとに1枚ずつ答案用紙を用いよ．
   (2) 解答する問題の分野名（線形代数，微積分，常微分方程式，ベクトル解析，力学，電磁気学のいずれか）を各答案用紙の問題番号欄に記入せよ．
   (3) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい．

4. 答案用紙には氏名を記入してはならない．

5. 問題用紙，答案用紙（予備を含む）はすべて回収するので，持ち帰らないこと．

問題は次のページから始まる.
このページは，下書きに用いてよい.

線形代数

以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ への線形写像が

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

のとき，以下の問いに答えよ．

1) 線形写像 f について，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ をすべて求めよ．

2) 1)で求めた λ に対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

3) 行列 $\boldsymbol{A}$ からできる線形写像 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の像 $\mathrm{Im}\,f$ と核 $\mathrm{Ker}\,f$ を求めよ．

(2) x, y を直交座標とする二次元実ベクトル空間を考える．下記の二次曲線について，以下の問いに答えよ．ただし，a を実定数とする．

$$5x^2 + 2xy + ay^2 - 16x - 8y + 2 = 0$$

1) この二次曲線を対称行列 $\boldsymbol{T}$ と実ベクトル $\boldsymbol{b}$ および実定数 c を用いて，

$${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + c = 0, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表す．ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置である．このとき $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{b}$ および c を求めよ．

2) 行列 $\boldsymbol{T}$ の固有値が 6 と 4 となるときの a を求めよ．

3) 2)で求めた a を用い，二次曲線を標準形 $\dfrac{X^2}{p} + \dfrac{Y^2}{q} = 1$ の形で表せ．ただし，X，Y は直交座標，p，q は実定数とする．

4) 二次曲線を xy 平面に図示せよ．

(3) 実数 a をパラメータに持つ以下の行列 $\boldsymbol{A}$ の階数を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix}$$

微積分

以下の問いに答えよ.

(1) 次の関数について, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

2) $y=(\cos x)^{\sin x}$ $\left(0\leq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

3) $y=\tan^{-1}x^2$ $(=\arctan x^2)$

(2) 定積分の定義を用いて, 以下の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left\{\sqrt{n^2-1^2}+2\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right\}$$

(3) α を正の定数とする. 以下の積分が収束する α の範囲を示し, 収束するときの積分値を α を用いて表せ.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}dxdy$$

ただし, $D=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\leq 2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$ とする.

(4) $x\geq 1$ で定義された実数値関数 $f(x)$ は, $f(1)=1$ かつ

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f(x)^2}$$

を満たすものとする. このとき, $f(x)$ が単調増加関数であることを示せ. さらに, $f(x)$ が上に有界であることを示せ. また,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)\leq 1+\frac{\pi}{4}$$

であることを示せ.

常微分方程式

以下の問いに答えよ.

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$x\frac{dy}{dx} = 2y^2 + y$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = \sin 2x$$

(3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 6e^{2x}$$

(4) xy 平面上（ただし，$x > 0$, $y > 0$ の領域のみを考慮する）において，滑らかな曲線 $y = f(x)$ がある．ただし $\frac{dy}{dx} \neq 0$ かつ $\frac{dy}{dx} \neq \infty$とする．このとき，以下の問いに答えよ.

1) 曲線 $y = f(x)$ 上の任意の点における接線は，x軸，y軸の両方と必ず交差するものとする． $y = f(x)$ 上の任意の点 $\mathrm{A}(x, y)$ における接線の上を動く点の座標を(X, Y) とする．この接線について，X, Yが満たすべき方程式を$\frac{dy}{dx}$, x, y を用いて表せ.

2) この接線と，座標軸とで囲まれる三角形ができ，さらにその三角形の面積Sが一定になるという．このとき$y = f(x)$ が満たすべき微分方程式を$\frac{dy}{dx}$, x, y, S を用いて表せ.

3) 2)において導出した微分方程式を解き，$f(x)$ を求めよ.

(4) の 3)のヒント：本微分方程式は，クレイロー型である． $\frac{dy}{dx} = p$ とおき，$y = px + h(p)$ の形で表し，その両辺を微分することにより解くことができる.

ベクトル解析

三次元直交座標系（デカルト座標系）において，x 軸，y 軸，z 軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) スカラー場 ϕ が $\phi = x^2yz + 4xz^2$ で表されるとき，以下の問いに答えよ．

1) 点 $(1,-2,-1)$ における $2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 方向の ϕ の方向微分係数を求めよ．

2) 点 $(1,-2,-1)$ における ϕ の方向微分係数が最大となる方向の単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を求めよ．

3) c を定数とすると，$\phi = c$ は曲面（等位面）を表す．この曲面が点 $(1,-2,-1)$ を通るとき，この点における接平面の方程式を求めよ．

(2) ベクトル関数 $\boldsymbol{F} = 3xy\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j}$ について，$y = 2x^2$ で表される xy 面上の曲線 C 上の点 $(0,0)$ から $(1,2)$ への線積分 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．ここで，$\boldsymbol{r}$ は C 上の点の位置ベクトルである．

(3) 4 点 A$(2,0,0)$，B$(0,2,0)$，C$(0,0,2)$，D$(2,2,2)$ を頂点とする四面体において，3 つの三角形△DAB，△DBC，△DCA をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする．

$S = S_1 + S_2 + S_3$ とするとき，$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{V})\cdot \boldsymbol{n}dS$ を求めよ．

ただし，$\boldsymbol{V} = (y+2z)\boldsymbol{i} + (2x+z)\boldsymbol{j} + (x+2y)\boldsymbol{k}$ はベクトル関数であり，$\boldsymbol{n}$ は四面体 ABCD の外へ向かう単位法線ベクトルである．

力学

図 1 のような紙面に垂直な方向の固定軸のまわりに自由に回転する質量 m の物理振り子（剛体振り子）を考える．物理振り子の重心 G を通り固定軸に垂直な面と，固定軸との交点を O とする．O を原点として鉛直下向きに x 軸，それと固定軸とに垂直に y 軸をとる．固定軸のまわりの物理振り子の慣性モーメントを I，OG と x 軸のなす角を θ，$\overline{\mathrm{OG}}=h$ とする．この物理振り子を $\theta=\pi/2$ の位置から静かに放すとき，下記の問いに答えよ．ただし，重力加速度の大きさを g とする．

(1) 物理振り子の固定軸のまわりの回転運動について考える．

1) 固定軸のまわりの回転の運動方程式を求めよ．

2) 物理振り子の角度 θ における角速度 $\dot{\theta}$ の大きさを，力学的エネルギー保存の法則から求めよ．

(2) 次に，物理振り子の運動方程式を，重心 G の運動とそのまわりの回転運動から考える．

1) 物理振り子の重心の座標を $(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}})$ とする．$x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}}$ を $x_{\mathrm{G}}=h\cos\theta$, $y_{\mathrm{G}}=h\sin\theta$ のように θ の関数として表すとき，物理振り子の重心の加速度 $\ddot{x}_{\mathrm{G}}, \ddot{y}_{\mathrm{G}}$ を $h, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ を用いて表せ．ただし，$\ddot{\theta}$ は物理振り子の角度 θ における角加速度とする．

2) 固定軸から物理振り子にはたらく抗力を $\boldsymbol{R}$ とし，その x, y 成分を R_x, R_y とする．物理振り子の重心に関する x 方向と y 方向の運動方程式から，R_x, R_y を $m, h, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, g$ を用いて表せ．

3) 物理振り子の重心を通って紙面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを I_{G} とする．物理振り子の重心まわりの回転の運動方程式を求め，平行軸の定理を用いることで，この式が 問(1)の 1)の結果と一致することを示せ．

(3) 固定軸からはたらく抗力の x 成分 R_x を m, I, h, θ, g を用いて表せ（$\dot{\theta}, \ddot{\theta}, I_{\mathrm{G}}$ は用いないこと）．

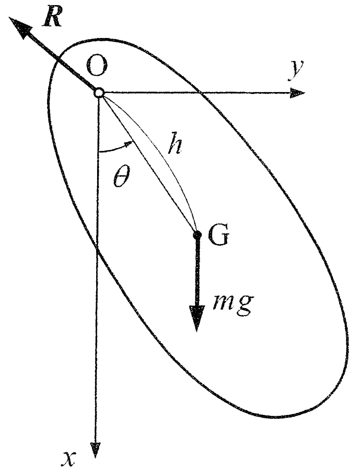

図 1

電磁気学

図1のように，外半径が r_1 の内部円筒導体と，内半径が r_2 の外部円筒導体とで構成される無限長の同軸円筒導体がある．外部円筒導体に対して内部円筒導体に電圧 V を印加した．以下の問いに答えよ．

(1) 外部円筒導体と内部円筒導体の間が真空（誘電率ε_0）であるとき，電界の大きさ E_r を同軸円筒の中心軸からの距離 r の関数として $r_1 < r < r_2$ の範囲で示せ．

(2) 問(1)において，導体間に蓄えられる中心軸方向単位長さあたりの静電エネルギーの大きさ U を求めよ．

(3) スイッチ S を閉じたまま，外部円筒導体と内部円筒導体の間を一様な比誘電率ε_{r}の誘電体で満たしたとき，導体間の最大電界値および蓄えられる静電エネルギーの大きさは，それぞれ誘電体で満たす前に比べて何倍になるかを求めよ．

(4) 問(3)の状態の後，スイッチ S を開き，さらに導体間の誘電体を抜き取り真空とした．このとき導体間に蓄えられている中心軸方向単位長さあたりの静電エネルギーの大きさ U' を求めよ．

(5) 外部円筒導体と内部円筒導体の間のうち，$r_1 \leq r \leq r_{\mathrm{a}}$ に比誘電率ε_{r}の誘電体を設置し，$r_{\mathrm{a}} < r < r_2$ は真空（比誘電率 1）とした．スイッチ S を閉じて，導体間に電圧 V を印加したとき，内部導体表面外側（$r = r_1$）の電界の大きさ E_{r1} を求めよ．

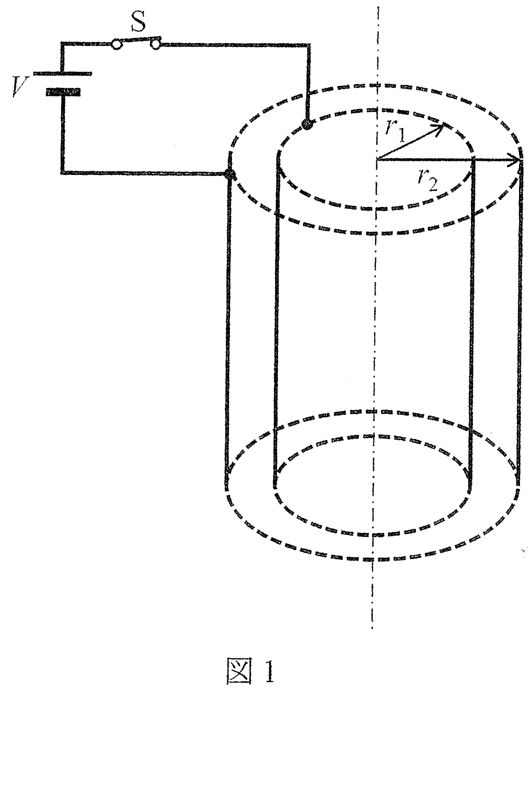

図 1