平成27年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程(前期課程)
入学試験問題

基礎部門

以下の注意をよく読みなさい.

1. 試験開始の合図があるまでは, この問題冊子を開いてはならない.

2. 問題は線形代数, 微積分, 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学の6問があるが, その中から次の通り4問に解答すること.
   (1) 線形代数 および 微積分 の2問はともに必ず解答すること.
   (2) 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学の4問の中から2問を選択して解答すること. 3問以上に解答した場合には無効となることがあるので注意せよ.

3. 答案用紙は, 予備1枚を含めて合計5枚ある.
   (1) 各問ごとに1枚ずつ答案用紙を用いよ.
   (2) 解答する問題の分野名(線形代数, 微積分, 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学のいずれか)を各答案用紙の問題番号欄に記入せよ.
   (3) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい.

4. 答案用紙には氏名を記入してはならない.

5. 問題用紙, 答案用紙(予備を含む)はすべて回収するので, 持ち帰らないこと.

問題は次のページから始まる.
このページは, 下書きに用いてよい.

線形代数

実数を成分に持つ三次元の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を並べて三つの三次の正方行列

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$$

$$\mathbf{B} = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1)$$

$$\mathbf{C} = (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1)$$

を作る．ただし $\mathbf{A}$ の行列式 $\det\mathbf{A}$ は h であり，$h \neq 0$とする．また，行列 $\mathbf{D}$ の転置を $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$と表して，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ とする．そして，ベクトル $\boldsymbol{a}$ のノルムを $\sqrt{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}$ と定義して $\|\boldsymbol{a}\|$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ のとき， h の値， $\mathbf{A}$ の階数 $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めよ．

(2) 次に，一般の$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$について考える．

1) $\mathbf{B}$ の行列式 $\det\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ の行列式 $\det\mathbf{C}$ を，h を用いて表せ．

2) 行列 $\mathbf{C}$ で定められる三次元実数ベクトル空間の線形写像 L について，L の核 $\mathrm{Ker}\,L$ を求めよ．

3) ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が互いに直交するとき，任意の実数を成分にもつ三次元の列ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ に対して $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\boldsymbol{v}=0$ となるための $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の条件を求めよ．

ヒント：(2) 2)　V, W をベクトル空間，F: $V \to W$ を線形写像，$\mathbf{0}$ をベクトル空間 W における零ベクトルとしたとき，$F(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ となるようなベクトル空間 V の元 $\boldsymbol{v}$ 全体の集合は線形写像 F の核とよばれ，$\mathrm{Ker}\,F$ と表される．

微積分

以下の問いに答えよ.

(1) 有理関数 $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+6x-3}{x^3-3x+2}$ の不定積分を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta$ を求めよ.

(3) テイラーの定理を用いて, $\sin(31^\circ)$ の近似値を有効数字4桁で求めよ.
必要ならば, 下表の近似値を用いること.

$\pi \approx 3.1416$	$\pi/180 \approx 1.7453\times10^{-2}$
$(\pi/180)^2 \approx 3.0462\times10^{-4}$	$(\pi/180)^3 \approx 5.3166\times10^{-6}$
$\sqrt{2} \approx 1.4142$	$\sqrt{3} \approx 1.7321$

(4) 懸垂線 $y=a\cosh\dfrac{x}{a}$ について, 以下の問いに答えよ.

1) 変数 x の区間 $[-b,b]$ におけるこの曲線の長さを求めよ.

2) 区間 $[-b,b]$ で, この曲線を x 軸まわりに回転した鼓状の立体の体積を求めよ.

ヒント : (2) $x=\tan(\dfrac{\theta}{2})$ を用いて変数変換する.

常微分方程式

以下の問いに答えよ.

(1) 常微分方程式 $\sin x \cos^2 y + \dfrac{dy}{dx}\cos^2 x = 0$ の一般解を求めよ.

(2) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x-y-1}{2x-2y+1}\right)^2$ の一般解を求めよ.

(3) 常微分方程式 $3x + y + x\dfrac{dy}{dx} = 0$ の一般解を求めよ.

(4) $P(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\dfrac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ で与えられる常微分方程式について考える.
ただし, $P(x) + Q(x) + R(x) = 0$ が成立するものとする.

1) $y = e^x$ が $P(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\dfrac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ の解となることを示せ.

2) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (-2x+1)\dfrac{dy}{dx} + (x-1)y = 0$ の一般解を求めよ.

ベクトル解析

三次元直交座標系（デカルト座標系）において，x 軸，y 軸，z 軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 助変数 s，t およびその関数 $z(s,t)$ を用いたベクトル関数 $\boldsymbol{A}(s,t)=s\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+z(s,t)\boldsymbol{k}$ が曲面 S_1 を表すとする．以下の問いに答えよ．

1) t を一定としたとき，$\boldsymbol{A}(s,t)$ は一つの空間曲線を描く．この曲線の単位接線ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ を求めよ．同様に，s を一定としたときに $\boldsymbol{A}(s,t)$ が描く曲線の単位接線ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{i} > 0$，，$\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{j} > 0$ とする．

2) 曲面 S_1 の二つの単位法線ベクトルを求めよ．

(2) ベクトル関数 $\boldsymbol{B}(x,y)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z(x,y)\boldsymbol{k}$ において，$z(x,y)=1-x^2-y^2$ とする．このとき，z 成分が 0 以上，すなわち，$z=1-x^2-y^2 \geq 0$ のときに $\boldsymbol{B}(x,y)$ が表す曲面を S_2 とする．以下の問いに答えよ．

1) 曲面 S_2 における面積要素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ を x，y，$dxdy$，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ を用いて示せ．ここで，$d\boldsymbol{S}$ は，曲面 S_2 の微小部分の面積を大きさにもつ法線方向のベクトルであり，その z 成分が正のものとする．

2) ベクトル関数 $\boldsymbol{C}(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$ の面積分 $\iint_{S_2} \boldsymbol{C} \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ．

(3) $x^2+y^2=1$，$z=0$ で表される閉曲線を C_0 とする．このときベクトル関数 $\boldsymbol{D}(x,y,z)=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+4z^2\boldsymbol{k}$ の線積分 $\oint_{C_0} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，$d\boldsymbol{r}$ は C_0 に沿った線素ベクトルである．また，線積分は，z 軸の正の方向から見たときに，反時計まわりに行うものとする．

力学

図1に示すような長さ $2r$ の質量が無視できる棒と，その両端に取り付けたいずれも質量 m の2つの質点Aおよび質点Bからなる剛体を考える．この剛体を水平方向から角度 θ $(0 < \theta < \pi/2)$ だけ傾けて初速度ゼロで自由落下させたところ，剛体は落下中に姿勢を変えることなく重心Pの位置が高さ h だけ落下したところで質点Aが床と完全弾性衝突し，その後回転しながら跳ね返った．床は固く滑らかであり摩擦は無視することができる．また，剛体は衝突の際に床から垂直な方向にのみ力を受け，衝突の前後で質点Aの垂直方向の速度は大きさが等しくその向きが逆になった．重力加速度を g として，以下の問いに答えよ．

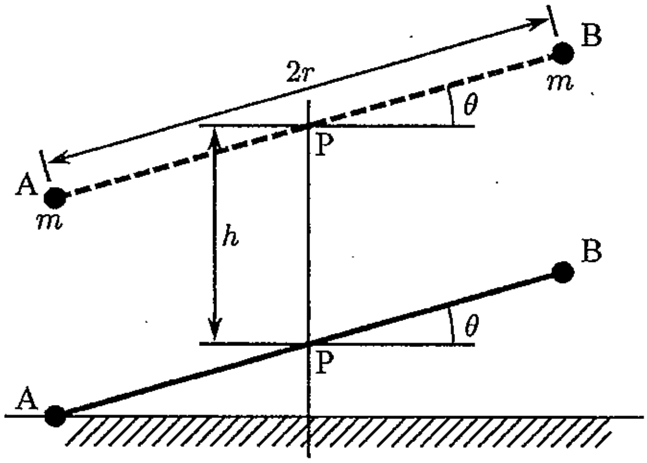

図1

(1) この剛体の重心Pまわりの慣性モーメントを求めよ．

(2) 衝突直後のこの剛体の重心Pの速度を v，角速度を ω として以下の問いに答えよ．

1) 衝突の際に質点と床の間で作用する力積を Δf とおき，衝突の前後での剛体の運動量に成り立つ関係を式で示せ．同様に角運動量に成り立つ関係を式で示せ．

2) 速度 v および角速度 ω を，r，h，θ および g を用いて表せ．

(3) 跳ね返った後に，剛体の重心Pが最高点に達したときの床からの高さ h' を r，h および θ を用いて表せ．ただし，跳ね返ってから最高点に達するまでの間，質点AとBのいずれも床と接触することはなかったと仮定する．

電磁気学

(1) 図 1 に示すように，真空中（透磁率 μ_0）において，y 軸上に置かれた無限長の導線 L 上を正の方向に電流 I（$I>0$）が流れている．また，一辺の長さ $2a$ の正方形状の回路 A が xy 平面に置かれている．回路 A の中心座標を $(x_A,\ 0)$ とし，$0<a<x_A$ とする．

1) xy 平面上の任意の点 $(x,\ y)$ における磁束密度の大きさを求めよ．
2) 回路 A を貫く磁束を求めよ．
3) 回路 A を x 軸方向に動かした時に回路 A に誘導される起電力を求めよ．ただし，回路 A の中心の移動速度を dx_A/dt，起電力の符号は反時計回りを正とせよ．
4) 3)において，回路 A の 4 辺 PQ, QR, RS, SP に沿って誘導される電場 E_{PQ}，E_{QR}，E_{RS}，および E_{SP} をそれぞれ求めよ．ただし，回路 A の中心の移動速度を dx_A/dt，電場の符号は反時計回りを正とせよ．

(2) 図 2 に示すように，一様な電場と磁場が存在する空間での電子の運動を考える．電場は，大きさを E（$E\geq 0$），向きを y 軸の負方向とする．磁場については，磁束密度の大きさを B（$B\geq 0$），向きを z 軸の正方向とする．ただし，座標系 xyz は右手系とし，重力は考えない．電子の質量を m，電荷を $-q$（$q>0$）とする．時刻 $t=0$ における電子の位置を $(0, 0, 0)$，速度を $(0,\ v_0, 0)$（$v_0>0$）とする．

1) 電子の速度を $(v_x,\ v_y,\ v_z)$ とし，x，y，z の各方向について電子の運動方程式を示せ．
2) 1)の結果を用いて，$\dfrac{d^2v_y}{dt^2}=-\left(\dfrac{qB}{m}\right)^2 v_y$ を示せ．
3) 電子の速度 $(v_x,\ v_y,\ v_z)$ を時刻 t の関数として求めよ．
4) $E=0$ とし，電子の運動の軌跡を表す方程式を求め，その軌跡を図示せよ．

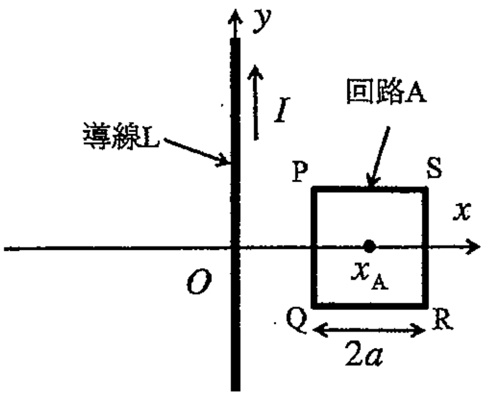

図 1

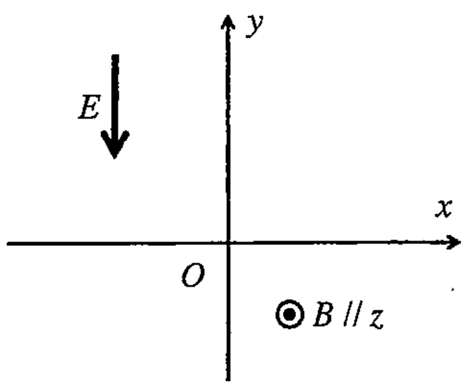

図 2