平成26年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程(前期課程)
入学試験問題

# 基礎部門

以下の注意をよく読みなさい.

1. 試験開始の合図があるまでは, この問題冊子を開いてはならない.

2. 問題は線形代数, 微積分, 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学の6問があるが, その中から次の通り4問に解答すること.
   (1) <u>線形代数 および 微積分 の2問はともに必ず解答すること</u>.
   (2) <u>常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学の4問の中から2問を選択して解答すること</u>. 3問以上に解答した場合には無効となることがあるので注意せよ.

3. 答案用紙は, 予備1枚を含めて合計5枚ある.
   (1) 各問ごとに1枚ずつ答案用紙を用いよ.
   (2) 解答する問題の分野名(線形代数, 微積分, 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学のいずれか)を各答案用紙の問題番号欄に記入せよ.
   (3) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい.

4. 答案用紙には氏名を記入してはならない.

5. 問題用紙, 答案用紙(予備を含む)はすべて回収するので, 持ち帰らないこと.

問題は次のページから始まる.
このページは, 下書きに用いてよい.

# 線形代数

３次元実数ベクトル空間$\boldsymbol{R}^3$上の元$\boldsymbol{v}$を，実数の順序づけられた組$(x,y,z)$を用いて，$\boldsymbol{v}=(x,y,z)$のように表す．$\boldsymbol{R}^3$から$\boldsymbol{R}^3$への写像$F:\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$により，ベクトル$\boldsymbol{v}$が$\boldsymbol{u}=(r,s,t)$に写像されることを，$F(\boldsymbol{v})=F(x,y,z)=(r,s,t)=\boldsymbol{u}$と表現する．$k$ をパラメータとしてもつ写像

$$F_k(x,y,z)=(x+2y+z+a, 2x+5y+3z+b, 3x+4y+kz+c)$$

を考える．ここで，$a,b,c$は実定数，$k$は整数である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 写像$F_k$が線形写像になるためには，$a=b=c=0$でなければならないことを示せ．

なお，以下の問いでは，$a=b=c=0$とする．

(2) $k=2$とする．$F_2$が非特異，すなわち$F_2$の核$\mathrm{Ker}\,F_2$の元が零ベクトル$\boldsymbol{0}$だけであることを示せ．

(3) $F_2$の逆写像$F_2^{-1}$を求めよ．

(4) $k=1$とする．$\boldsymbol{R}^3$の基底ベクトル$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$の$F_1$による写像を求め，その結果を用いて像$\mathrm{Im}\,F_1$の次元を求めよ．

(5) $F_1$の核$\mathrm{Ker}\,F_1$の基底ベクトルと次元を求めよ．なお，基底ベクトルのノルムは1に正規化するものとする．

ヒント

問い(1)　線形写像の定義を適用せよ．

問い(2)　核（$\mathrm{Ker}\,f$）とは，ベクトル空間$V$から$V'$への線形写像$f:V \to V'$において，$\boldsymbol{0}'$をベクトル空間$V'$における零ベクトルとするとき，$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}'$ となるベクトル空間$V$の元$\boldsymbol{x}$全体の集合である．

問い(4)　像（$\mathrm{Im}\,f$）とは，ベクトル空間$V$上の任意の元$\boldsymbol{x}$の線形写像$f$による像$f(\boldsymbol{x})$全体の集合のことである．

# 微積分

**1** 以下の問いに答えよ．

(1) 次の極限値が存在するならば，その値を求めよ．存在しなければ，そのことを示せ．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 2y^2}{3x^2 + y^2}$$

(2) 次の不定積分を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

$$\int \frac{1}{x(\log x)(\log(\log x))(\log(\log(\log x)))}\,dx$$

(3) 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\pi/2} \left( \int_{2y/\pi}^{1} \cos\left(\frac{y}{x}\right) dx \right) dy$$

**2** 2次元直交デカルト座標系上の曲線C: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線C上の点 $(x, y)$ は，$x = a\cos^3 t$，$y = a\sin^3 t$ $(0 \leq t < 2\pi)$ と表すことができる．原点 $(0, 0)$ から曲線Cまでの距離が最短となる $t$ の値を $0 \leq t < 2\pi$ の範囲ですべて求め，最短距離を求めよ．

(2) 曲線C上の点 $(x, y)$ における接線の傾き $dy/dx$ を $t$ の関数として求めよ．また，曲線C上で接線の傾きが0になる点 $(x, y)$ および $\pm\infty$ となる点 $(x, y)$ をそれぞれ求め，それをもとに $x$ 軸，$y$ 軸と曲線Cの概形を図示せよ．

(3) 曲線Cによって囲まれる面積 $S$ を求めよ．

## 常微分方程式

**1** 以下の問いに答えよ.

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$xy\frac{dy}{dx}=x^2+2y^2$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=\sin 2x$$

**2** 2次元直交デカルト座標系上のある曲線 $f(x,y)=0$ では，曲線上の任意の点 P における接線に，原点 O から下ろした垂線の長さが点 P の $x$ 座標の絶対値に等しい．以下の問いに答えよ.

(1) 点 P の座標を $(a,b)$ とし，点 P における接線上の点を $(X,Y)$ とする．点 P における $\dfrac{dy}{dx}$ を $y'_P$ と表す．$X,Y$ の満たすべき方程式を $a,b,y'_P$ を用いて表せ.

(2) 曲線 $f(x,y)=0$ が満たす微分方程式を求めよ.

(3) 問 (2) で求めた微分方程式の一般解を求めよ.

# ベクトル解析

3 次元直交デカルト座標系において，$x$ 軸，$y$ 軸，$z$ 軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル関数を $\boldsymbol{A} = y\,\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j}$ とし，点 P の座標を(1, 0, 0)，点 Q の座標を(1, 1, 0)とする．以下の問いに答えよ．

1) 原点 O から $x$ 軸に沿って点 P に至り，点 P から $y$ 軸に平行に直線 PQ に沿って点 Q に至る経路を $C_1$ とする．$C_1$ に沿った $\boldsymbol{A}$ の線積分を求めよ．

2) $xy$ 平面上で，$y = x^2$ に沿って原点 O から点 Q に至る経路を $C_2$ とする．$C_2$ に沿った $\boldsymbol{A}$ の線積分を求めよ．

(2) 6 つの平面 $x = 0$，$y = 0$，$z = 0$，$x = 1$，$y = 2$，$z = 3$ で囲まれた直方体の表面を $S_1$ とし，$S_1$ における単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_1$ とする．

ベクトル関数 $\boldsymbol{F} = xy\,\boldsymbol{i} + yz\,\boldsymbol{j} - z^2\,\boldsymbol{k}$ の面積分 $\int_{S_1} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_1 dS$ を求めよ．$\boldsymbol{n}_1$ は，直方体の内部から外部へ向かう方向を正とする．

(3) 曲面の方程式 $z = g\,(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ で与えられる曲面のうち，$x \geq 0$，$y \geq 0$，$z \geq 0$ の範囲の部分を $S_2$ とする．$f\,(x, y, z) = z - g\,(x, y)$ の勾配が曲面 $S_2$ の法線ベクトルとなることを用いて以下の問いに答えよ．

1) 曲面 $S_2$ の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_2$ を求めよ．$\boldsymbol{n}_2$ は，原点から曲面 $S_2$ に向かう方向を正とする．

2) ベクトル関数 $\boldsymbol{B} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$ の面積分 $\int_{S_2} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}_2 dS$ を求めよ．

# 力学

質量 $m$ の2つの質点が剛体棒の両端に，質量 $M$ の質点が剛体棒の中央に固定された連結系を考える．この剛体棒の長さは $2r$ であり，質量は無視できるものとする．図1に示すように，この連結系の両端の質点をバネ定数 $k$ の2本のバネで天井から吊し，水平に静止させた．静止した連結系の重心を原点とし，水平方向右向きを $x$ 軸，鉛直方向下向きを $y$ 軸とする．

この連結系左右の質量 $m$ の質点が図2のように上下運動をすることを考える．紙面に垂直な方向の運動は考えない．運動を開始した後の左右の質量 $m$ の質点の任意時刻の $y$ 座標をそれぞれ $y_1$，$y_2$ として，以下の問いに答えよ．ただし，連結系が回転運動する場合の回転角は微小であり，連結系が傾いた場合の各質点の $x$ 方向の変位は無視できるものとする．また，空気抵抗は無視できるものとする．

(1) 連結系の重心の $y$ 方向の運動量を $y_1$，$y_2$ を用いて示せ．

(2) 連結系の重心の $y$ 方向の運動方程式を示し，単振動の運動方程式であることを説明せよ．

(3) 連結系の重心のまわりの回転の運動方程式を示し，単振動の運動方程式であることを説明せよ．

(4) $y_1=y_0$, $y_2=2y_0$ ($y_0\neq0$) の初期変位を与えて静かに解放し，連結系が運動を開始した．運動を開始した時刻を $t=0$ として，重心の $y$ 座標を時間 $t$ の関数として表せ．

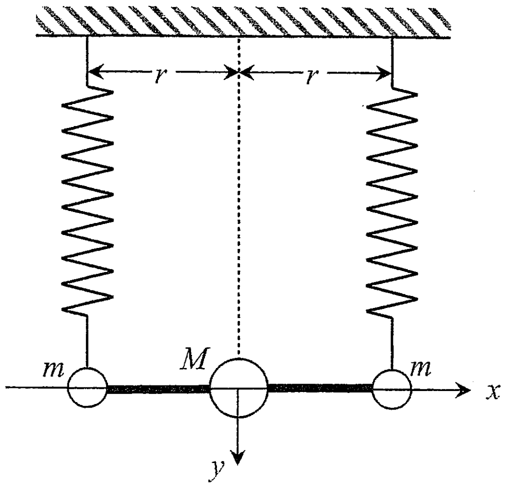

図1

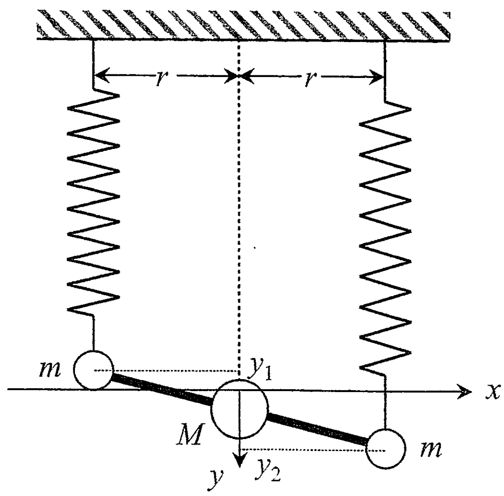

図2

# 電磁気学

電極面積 $S$, 電極間距離 $d$ の平行平板コンデンサにおいて，一方の電極が直流電圧 $V_0$（>0）の電源に接続され，他方の電極が接地され（その電位を 0 [V]とする），コンデンサが十分に充電されている．このとき，以下の各問いに答えよ．ただし，電極間の電気力線は一様であり，電極に対して垂直成分のみを有するものとする．また，真空の誘電率を $\varepsilon_0$ とする．

(1) 図 1 のように電極間が空気（比誘電率 $\varepsilon_r=1$）で満たされている場合，電極間の電界 $E_1$，静電容量 $C_1$，電極上の電荷 $Q_1$，電極間に蓄えられている静電エネルギー $U_1$ をそれぞれ求めよ．

(2) 電極と同じ形状と面積の断面を持ち，厚さ $d$ の固体誘電体（$\varepsilon_r=4$）で電極間が満たされている場合（図 2)，電極間の電界 $E_2$ を $E_1$ を用いて表せ．同様に，静電容量 $C_2$ を $C_1$，電極上の電荷 $Q_2$ を $Q_1$，電極間に蓄えられている静電エネルギー $U_2$ を $U_1$ を用いてそれぞれ表せ．

(3) 電極間が空気で満たされている場合，コンデンサを直流電源から外した後，コンデンサの電極間距離を $d/2$ に縮めたとき，電極間の電位差 $V_3$ を $V_0$，電界 $E_3$ を $E_1$，静電容量 $C_3$ を $C_1$，電極上の電荷 $Q_3$ を $Q_1$，電極間に蓄えられている静電エネルギー $U_3$ を $U_1$ を用いてそれぞれ表せ．

(4) 電極間が空気で満たされた平行平板コンデンサに直流電源が接続された状態で，電極と同じ形状と面積の断面を持ち，厚さ $d/4$ の固体誘電体（$\varepsilon_r=4$）が図 3 に示す位置 A－B 間に電極に平行に挿入されている場合，電極間の電位分布と電界分布を直流電源が接続された電極からの距離 $x$ の関数としてそれぞれ図示せよ．また，電極間の静電容量 $C_4$ を $C_1$ を用いて求めよ．

(5) (4)において，固体誘電体の代わりに同じ形状の金属導体が A－B 間に挿入されている場合，電極間の電位分布と電界分布をそれぞれ図示せよ．また，A－B 間に挿入されている金属導体の電位 $V_5$ を $V_0$ を用いて求めよ．

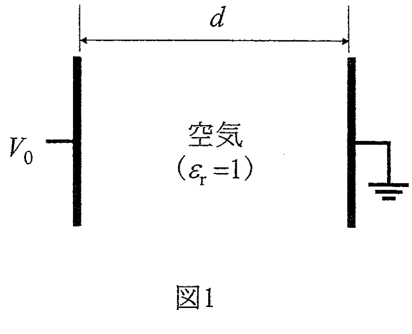


図1

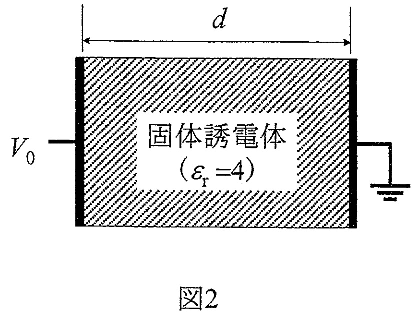


図2

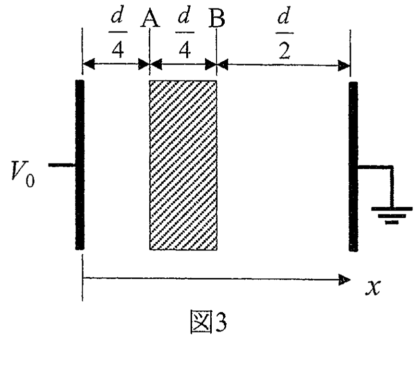


図3