

平成25年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程(前期課程)
入学試験問題

基礎部門

以下の注意をよく読みなさい。

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題は線形代数、微積分、常微分方程式、ベクトル解析、力学、電磁気学の6問があるが、その中から次の通り4問に解答すること。
 - (1) 線形代数 および 微積分 の2問はともに必ず解答すること。
 - (2) 常微分方程式、ベクトル解析、力学、電磁気学の4問の中から2問を選択して解答すること。 3問以上に解答した場合には無効となることがあるので注意せよ。
3. 答案用紙は、予備1枚を含めて合計5枚ある。
 - (1) 各問ごとに1枚ずつ答案用紙を用いよ。
 - (2) 解答する問題の分野名(線形代数、微積分、常微分方程式、ベクトル解析、力学、電磁気学のいずれか)を各答案用紙の問題番号欄に記入せよ。
 - (3) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい。
4. 答案用紙には氏名を記入してはならない。
5. 問題用紙、答案用紙(予備を含む)はすべて回収するので、持ち帰らないこと。

問題は次のページから始まる。
このページは、下書きに用いてよい。

線形代数

a, b, c を定数として, 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ を定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) 3 次元ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$ の組が線形独立であるために, a と b , b と c , c と a のそれぞれの間に成り立つべき条件を求めよ.

(3) $a = 1, b = -1, c = 0$ とする.

1) A の固有値を求めよ.

2) 行列方程式 $A^3 + pA^2 + qA + rE = O$ を満たす定数 p, q, r を求めよ. ここで, E は単位行列, O は零行列を表す.

3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

4) 行列 $B = 2A^5 - A^4 - 4A^3 - A^2 - 3A - 2E$ を求めよ.

(4) $a = 1, b = 1, c = 0$ とする. このとき, 3 次元ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対応させる線形写像について, その核空間の基底を一組求めよ.

微積分

以下の問いに答えよ.

- (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$$

- (2) 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} \cos x dx$$

- (3) 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \cos^2 x dx$$

- (4) n を 0 以上の整数とする. 以下の問いに答えよ.

- 1) 定積分 $A_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$ の値を求めよ.

(ヒント: $A_{n+2} - A_n$ を計算するとよい.)

- 2) 定積分 $B_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx$ の値を求めよ.

(ヒント: $B_{n+1} - B_n$ を計算するとよい. また, 1) の答えを用いてもよい.)

常微分方程式

以下の問いに答えよ.

- (1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 5e^{3x}$$

- (2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y - 2}{x - y + 1}$$

- (3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{-x} \cos x$$

- (4) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 1$$

(ヒント: $y = x$ は, $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$ の解である.)

ベクトル解析

3次元直交 xyz 座標系において、 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ および $x + y + z \leq 1$ によって定義される領域を V と表す。 V の境界を S と表し、 S の平らな部分を S_1 (これは円板である)、残りの部分を S_2 とする。また、ベクトル関数 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を定義する。以下の問いに答えよ。

(1) S_1 の中心座標および半径を求めよ。

(2) 線積分 $\int_C (y \, dx + z \, dy + x \, dz)$ を求めよ。ここで、 C は S_1 の円周を表す。ただし、 C の向きは、 C に沿って移動するとき x, y, z 軸の順で交わるように定める。

(3) 体積積分 $\int_V \operatorname{div} \mathbf{r} \, dV$ を求めよ。

(4) 面積分 $\int_{S_1} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS$ および $\int_{S_2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS$ を求めよ。ここで、 $\mathbf{n}$ は S_1 および S_2 の外向き単位法線ベクトルを表す。

力学

図1に示すように、質量の無視できる長さ L の棒に、一様な円板1（質量 m 、半径 a ）と円板2（質量 M 、半径 A ）が上下にとりつけられている。それぞれの円板の中心は棒の延長線上にあり、棒のある点 O を支点にした剛体振り子を考える。振り子の運動は水平な固定軸まわりの運動で、軸に垂直な面内のみを考える。ただし、振り子の支点を円板1に十分近い点とする。ここで、棒が円板1に連結している点を点 P 、円板2に連結している点を点 Q 、 OP の距離を x 、鉛直線からの棒の振れ角を θ 、鉛直下方に働く重力加速度を g とする。それぞれの円板の質量は $m < M$ の関係があり、円板1と円板2の上下の位置関係が変わらない微小振動を考える（ $\sin\theta \cong \theta$ ）。棒の太さや円板の厚みは無視できるものとして、以下の問いに答えよ。

(1) 円板1と円板2に働く力のモーメントから運動方程式の導出を考える。

- 1) 円板1について、その重心を通る固定軸まわりの慣性モーメントが $ma^2/2$ となることを示せ。
- 2) 点 O を通る軸のまわりの円板1と円板2の慣性モーメントをそれぞれ求めよ。ただし、円板2の重心を通る固定軸まわりの慣性モーメントが $MA^2/2$ となることを用いてよい。
- 3) それぞれの円板に働く力のモーメントを用いて、この剛体振り子の運動方程式を示せ。また、振動の周期を求めよ。

(2) 円板1と円板2から成る系の重心を G とし、すべての外力がこの重心に作用すると考える。

- 1) 点 P から重心 G までの距離を求めよ。
- 2) 上記の1)の結果を使って剛体振り子の運動方程式を示し、振動の周期を求めよ。

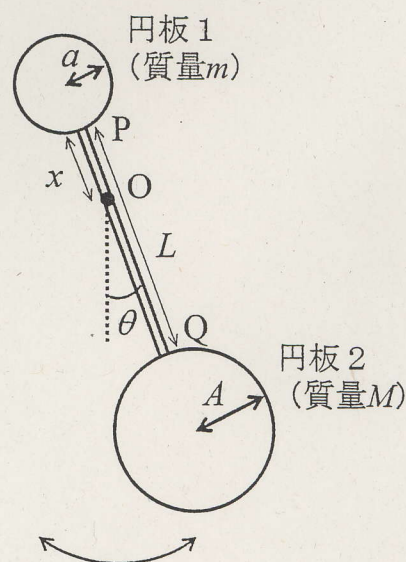


図1

電磁気学

以下の問いに答えよ。なお、下記における電荷 Q はすべて正の値であり、また、真空の誘電率を ϵ_0 とする。

- (1) 総電荷 Q である半径 a の導体球が真空中に置かれている。導体球の中心からの距離を r とする。このとき、導体球によって生じる電場の大きさ E および電位 φ を r の関数としてそれぞれ求めよ。また、電場の大きさ E および電位 φ を縦軸に、距離 r を横軸として、それぞれ図示せよ。なお、導体球中心から無限遠の位置の電位をゼロとする。
- (2) 内部に電荷が一様に分布している半径 a の球を考える。球は真空中に置かれており、その総電荷は Q である。
 - 1) 球の電荷密度を求めよ。
 - 2) 球の中心からの距離を r とする。このとき、球によって生じる電場の大きさ E および電位 φ を r の関数としてそれぞれ求めよ。また、電場の大きさ E および電位 φ を縦軸に、距離 r を横軸として、それぞれ図示せよ。なお、球中心から無限遠の位置の電位をゼロとする。
- (3) 総電荷 Q である半径 a の導体球 A を、半径 b ($b > a$) の導体球殻 B を用いて中心が一致するように囲んだコンデンサーを考える (図 1)。導体球殻 B は接地されている。また、導体球 A および導体球殻 B とともに真空中に置かれており、導体球殻 B の厚みは無視できるものとする。
 - 1) コンデンサーの静電容量を求めよ。
 - 2) 導体球 A と導体球殻 B の間の空間を比誘電率 ϵ_1 の物質で満たすことによる静電エネルギーの変化量を求めよ。

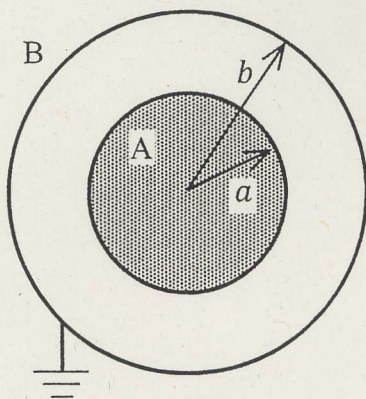


図 1