平成25年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程（前期課程）
入学試験問題

基礎部門

以下の注意をよく読みなさい.

1. 試験開始の合図があるまでは, この問題冊子を開いてはならない.

2. 問題は線形代数, 微積分, 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学の6問があるが, その中から次の通り4問に解答すること.
   (1) 線形代数　および　微積分　の2問はともに必ず解答すること.
   (2) 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学の4問の中から2問を選択して解答すること. 3問以上に解答した場合には無効となることがあるので注意せよ.

3. 答案用紙は, 予備１枚を含めて合計5枚ある.
   (1) 各問ごとに1枚ずつ答案用紙を用いよ.
   (2) 解答する問題の分野名（線形代数, 微積分, 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学のいずれか）を各答案用紙の問題番号欄に記入せよ.
   (3) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい.

4. 答案用紙には氏名を記入してはならない.

5. 問題用紙, 答案用紙（予備を含む）はすべて回収するので, 持ち帰らないこと.

問題は次のページから始まる.

このページは，下書きに用いてよい.

線形代数

a，b，c を定数として，3 次正方行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ を定義する．以下の問いに答えよ．

（1）$\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ．

（2）3 次元ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$ の組が線形独立であるために，a と b，b と c，c と a のそれぞれの間に成り立つべき条件を求めよ．

（3）$a = 1$，$b = -1$，$c = 0$ とする．

1）$\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ．

2）行列方程式 $\boldsymbol{A}^3 + p\boldsymbol{A}^2 + q\boldsymbol{A} + r\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ を満たす定数 p，q，r を求めよ．ここで，$\boldsymbol{E}$ は単位行列，$\boldsymbol{O}$ は零行列を表す．

3）逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

4）行列 $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{A}^5 - \boldsymbol{A}^4 - 4\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ を求めよ．

（4）$a = 1$，$b = 1$，$c = 0$ とする．このとき，3 次元ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対応させる線形写像について，その核空間の基底を一組求めよ．

微積分

以下の問いに答えよ．

(1)　次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$$

(2)　次の定積分を求めよ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$$

(3)　次の定積分を求めよ．

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}\cos^2 x\,dx$$

(4)　n を 0 以上の整数とする．以下の問いに答えよ．

1）定積分 $A_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ の値を求めよ．

（ヒント：$A_{n+2} - A_n$ を計算するとよい．）

2）定積分 $B_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$ の値を求めよ．

（ヒント：$B_{n+1} - B_n$ を計算するとよい．また，1）の答えを用いてもよい．）

常微分方程式

以下の問いに答えよ．

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 5e^{3x}$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y-2}{x-y+1}$$

(3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{-x}\cos x$$

(4) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 1$$

（ヒント：$y = x$ は，$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ の解である．）

ベクトル解析

3次元直交 xyz 座標系において，$x^2+y^2+z^2 \leq 1$ および $x+y+z \leq 1$ によって定義される領域を V と表す．V の境界を S と表し，S の平らな部分を S_1（これは円板である），残りの部分を S_2 とする．また，ベクトル関数 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を定義する．以下の問いに答えよ．

（1）S_1 の中心座標および半径を求めよ．

（2）線積分 $\displaystyle\int_C (y\,dx + z\,dy + x\,dz)$ を求めよ．ここで，C は S_1 の円周を表す．ただし，C の向きは，C に沿って移動するとき x，y，z 軸の順で交わるように定める．

（3）体積積分 $\displaystyle\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{r}\,dV$ を求めよ．

（4）面積分 $\displaystyle\int_{S_1} \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ および $\displaystyle\int_{S_2} \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ．ここで，$\boldsymbol{n}$ は S_1 および S_2 の外向き単位法線ベクトルを表す．

力学

図１に示すように，質量の無視できる長さ L の棒に，一様な円板１（質量 m，半径 a）と円板２（質量 M，半径 A）が上下にとりつけられている．それぞれの円板の中心は棒の延長線上にあり，棒のある点Ｏを支点にした剛体振り子を考える．振り子の運動は水平な固定軸まわりの運動で，軸に垂直な面内のみを考える．ただし，振り子の支点を円板１に十分近い点とする．ここで，棒が円板１に連結している点を点 P，円板２に連結している点を点 Q，OP の距離を x，鉛直線からの棒の振れ角をθ，鉛直下方に働く重力加速度を g とする．それぞれの円板の質量は $m<M$ の関係があり，円板１と円板２の上下の位置関係が変わらない微小振動を考える（$\sin\theta \fallingdotseq \theta$）．棒の太さや円板の厚みは無視できるものとして，以下の問いに答えよ．

(1)　円板１と円板２に働く力のモーメントから運動方程式の導出を考える．

1) 円板１について，その重心を通る固定軸まわりの慣性モーメントが $ma^2/2$ となることを示せ．

2) 点Ｏを通る軸のまわりの円板１と円板２の慣性モーメントをそれぞれ求めよ．ただし，円板２の重心を通る固定軸まわりの慣性モーメントが $MA^2/2$ となることを用いてよい．

3) それぞれの円板に働く力のモーメントを用いて，この剛体振り子の運動方程式を示せ．また，振動の周期を求めよ．

(2)　円板１と円板２から成る系の重心をＧとし，すべての外力がこの重心に作用すると考える．

1) 点Ｐから重心Ｇまでの距離を求めよ．

2) 上記の 1)の結果を使って剛体振り子の運動方程式を示し，振動の周期を求めよ．

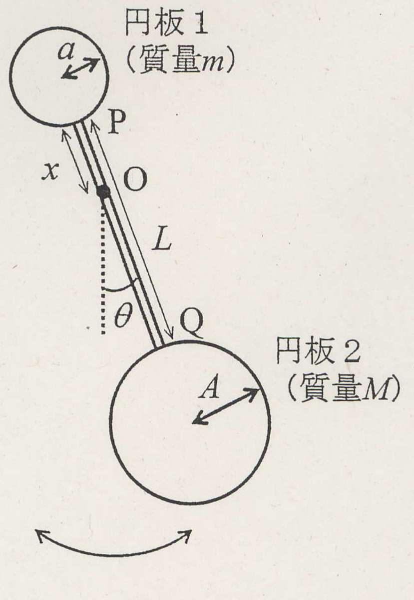

図１

電磁気学

以下の問いに答えよ．なお，下記における電荷Qはすべて正の値であり，また，真空の誘電率をε_0とする．

(1) 総電荷Qである半径aの導体球が真空中に置かれている．導体球の中心からの距離をrとする．このとき，導体球によって生じる電場の大きさEおよび電位φをrの関数としてそれぞれ求めよ．また，電場の大きさEおよび電位φを縦軸に，距離rを横軸として，それぞれ図示せよ．なお，導体球中心から無限遠の位置の電位をゼロとする．

(2) 内部に電荷が一様に分布している半径aの球を考える．球は真空中に置かれており，その総電荷はQである．

1) 球の電荷密度を求めよ．

2) 球の中心からの距離をrとする．このとき，球によって生じる電場の大きさEおよび電位φをrの関数としてそれぞれ求めよ．また，電場の大きさEおよび電位φを縦軸に，距離rを横軸として，それぞれ図示せよ．なお，球中心から無限遠の位置の電位をゼロとする．

(3) 総電荷Qである半径aの導体球Aを，半径b（$b > a$）の導体球殻Bを用いて中心が一致するように囲んだコンデンサーを考える（図1）．導体球殻Bは接地されている．また，導体球Aおよび導体球殻Bともに真空中に置かれており，導体球殻Bの厚みは無視できるものとする．

1) コンデンサーの静電容量を求めよ．

2) 導体球Aと導体球殻Bの間の空間を比誘電率ε_1の物質で満たすことによる静電エネルギーの変化量を求めよ．

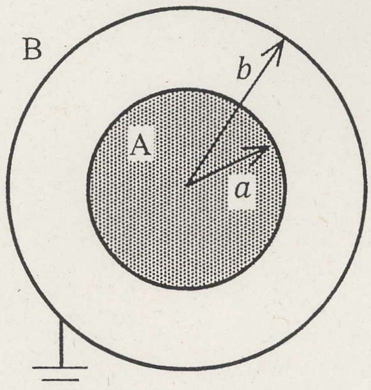

図1

平成25年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程（前期課程）
入学試験問題

専門部門

以下の注意をよく読みなさい.

1. 試験開始の合図があるまでは, この問題冊子を開いてはならない.

2. 答案用紙は, 予備１枚を含めて合計2枚ある.
 (1) 罫線が印刷された答案用紙1枚に解答せよ. (問題番号は空欄でよい)
 (2) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい.

3. 答案用紙には氏名を記入してはならない.

4. 問題用紙, 答案用紙（予備を含む）はすべて回収するので, 持ち帰らないこと.

問題は次のページから始まる.
このページは，下書きに用いてよい.

小論文

以下のキーワードのうち一つを選び，それに対して計算理工学専攻に関連した学問分野が貢献しうる事柄，およびその貢献の限界について，具体例を挙げながら論述しなさい．

キーワード：

防災，減災，省エネ，環境保全，医療，生命，プライバシー保護，新材料開発，
社会基盤，高齢化社会，産業空洞化，ものづくり

なお，論理展開力を重視して採点するので，そのことに留意して論述しなさい．