平成24年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程(前期課程)
入学試験問題

基礎部門

以下の注意をよく読みなさい.

1. 試験開始の合図があるまでは, この問題冊子を開いてはならない.

2. 問題は線形代数, 微積分, 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学の6問があるが, その中から次の通り4問に解答すること.
   (1) 線形代数 および 微積分 の2問はともに必ず解答すること.
   (2) 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学の4問の中から2問を選択して解答すること. 3問以上に解答した場合には無効となることがあるので注意せよ.

3. 答案用紙は, 予備1枚を含めて合計5枚ある.
   (1) 各問ごとに1枚ずつ答案用紙を用いよ.
   (2) 解答する問題の分野名(線形代数, 微積分, 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学のいずれか)を各答案用紙の問題番号欄に記入せよ.
   (3) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい.

4. 答案用紙には氏名を記入してはならない.

5. 問題用紙, 答案用紙(予備を含む)はすべて回収するので, 持ち帰らないこと.

問題は次のページから始まる.
このページは, 下書きに用いてよい.

線形代数

x, y, z を直交座標とする3次元実ベクトル空間を考える．この空間内の点 (x_1, y_1, z_1) を点 (x_2, y_2, z_2) に移す写像 f が，3次正方行列 A を用いて $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ の形で表されるものとする．この写像 f により，点 $(k,\ k-2,\ 1)$, $(k,\ 2k-4,\ 1)$, $(k+2,\ 2k-4,\ 2)$ がそれぞれ点 $(3k-5,\ 3k-1,\ -2)$, $(4k-7,\ 5k-5,\ k-4)$, $(4k-6,\ 5k,\ k-6)$ に移されるとき，以下の問いに答えよ（k は定数）．

(1) 点 $(-k+2,\ 0,\ 0)$, $(0,\ k-2,\ 0)$ が写像 f により移される点をそれぞれ求めよ．

(2) 行列 A が一意に定まるための k に関する条件を求めよ．また，そのときの A を求めよ．

(3) 問 (2) で求めた A に対して，式

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を満たす点 (x, y, z) が原点以外に存在するような定数 λ の値をすべて求めよ．また，それぞれの λ について，この式を満たす点 (x, y, z) 全体の集合がつくる図形を表す方程式を x, y, z を用いて示せ．

微積分

1．以下の不定積分を求めよ．

(1) $G_1 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

(2) $G_2 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

(3) $G_3 = \displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$

なお，G_3 を G_1，G_2 を用いて表しても良い．

2．非負整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) 次の関係が成り立つことを示せ．

$$I_{n-2} > I_{n-1} > I_n \quad (n \geq 2) \qquad \cdots \text{(i)}$$

(2) 部分積分法を用いて，次式が成り立つことを示せ．また，I_6，I_7 の値を求めよ．

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2) \qquad \cdots \text{(ii)}$$

(3) 式 (i)，(ii) の関係を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n}$ を求めよ．

常微分方程式

以下の問いに答えよ．

(1) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ は，$p = ax+by+c$ と変数変換を行うと，p と x の変数分離形の微分方程式に変形できることを示せ．

(2) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}(y-x) = y^2+y+x^2-x-2xy+1$ の一般解を求めよ．

(3) 常微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx} = x+y$ の一般解を求めよ．

(4) 常微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6x\dfrac{dy}{dx} + 9x^2y = 0$ の一般解を求めよ．
（ヒント：$y = ue^{-\frac{3}{2}x^2}$ とおくと良い．）

ベクトル解析

以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ ，$p = |\boldsymbol{r}|$ とする．このとき，∇p を $\boldsymbol{r}$ と p を用いて表せ．

(2) x-y 平面上の曲線 $y = x^2$ に沿って，ベクトル関数 $\boldsymbol{F} = (2xy, x^2 + y^2, 0)$ の，点 $(0, 0, 0)$ から点 $(2, 4, 0)$ に至る積分路 C にわたる線積分 $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(3) ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (A_1; A_2, A_3)$, $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ がある．

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$$

が成り立つことを，ベクトルの成分を用いた計算により示せ．

(4) ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ とスカラー関数 f がある．問 (3) で示した等式を用いて，

$$\int_S (\nabla f \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = -\int_V \nabla f \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) dV$$

であることを証明せよ．ただし，S は領域 V の表面を表す．

なお，ガウスの発散定理を用いても良い．

力学

図 1 に示すように，質量 m のおもりと糸でつながれた質量 M の物体が斜面上に置かれて静止している．図 2 に示すように，物体の形状は直方体（各辺の長さ $2a, 2b, 2c$）で，重心は底面の中心から a の高さにある．また糸は，図 2 に示す面 A の中心線上で底面から高さ h（$h > a$）の位置で物体に取りつけられている．その糸は斜面に平行に張られているものとする．いま，斜面と水平とのなす角度θを小さくしていったところ，物体は上方へすべり始めた．すべり始める直前の角度をθ_0とする．すべり始めた直後に斜面の角度を固定した．その角度をθ_1（$\theta_1 < \theta_0$）とする．ただし，物体はその底面全面が斜面から離れることなく，上方へすべるものとする．重力加速度を g，物体と斜面との間の静止摩擦係数および動摩擦係数をそれぞれμ，μ'，糸と滑車は質量がゼロで摩擦がないものとして，以下の問いに答えよ．

(1) 物体が運動を開始する瞬間に，物体の底面全面が斜面から離れないための高さ h の条件をθ_0を用いて表せ．

(2) 物体がすべり始める直前の角度θ_0を用いて，静止摩擦係数μを求めよ．

(3) 物体が斜面上方にすべっているときの糸の張力を求めよ．

(4) 物体がすべり始めて，斜面に沿って距離 d だけ進んだときの物体の速さを求めよ．ただし，物体は斜面上端に達しないものとする．

(5) 物体が斜面に沿って距離 d だけ進んだ直後に，物体とおもりをつないでいる糸を切断した．糸が切断されてから，物体の上昇が止まるまでに物体が進む斜面上の距離を求めよ．ただし，物体は斜面上端に達しないものとする．

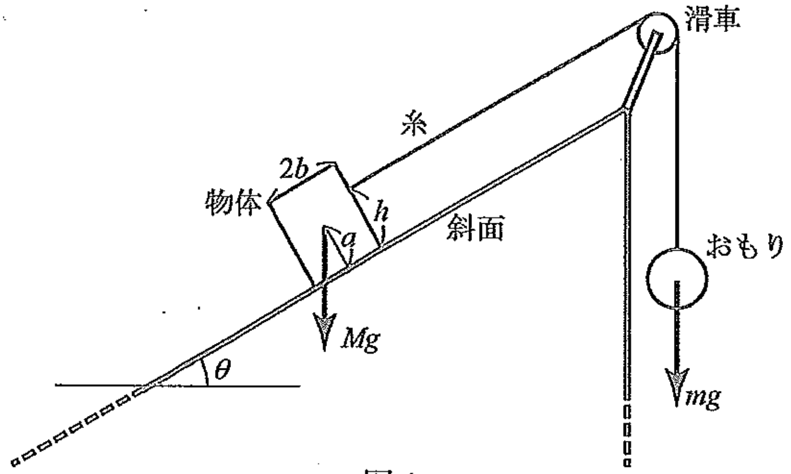


図 1

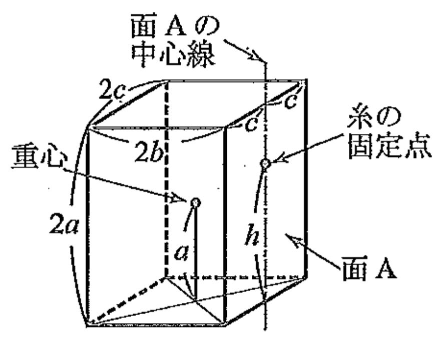


図 2

電磁気学

半径a，b，高さhの厚さを無視できる中空円筒状の導体が，図1(a)に示すように両端をそろえて中心軸が一致するように配置され，起電力Vの直流電源に接続されている．ここで，hはa，bに比べて十分大きく，電極の端部効果は無視できるものとする．以下の問いに答えよ．ただし，導体間の誘電率は真空の誘電率ε_0に等しく，重力は無視できるものとしてよい．

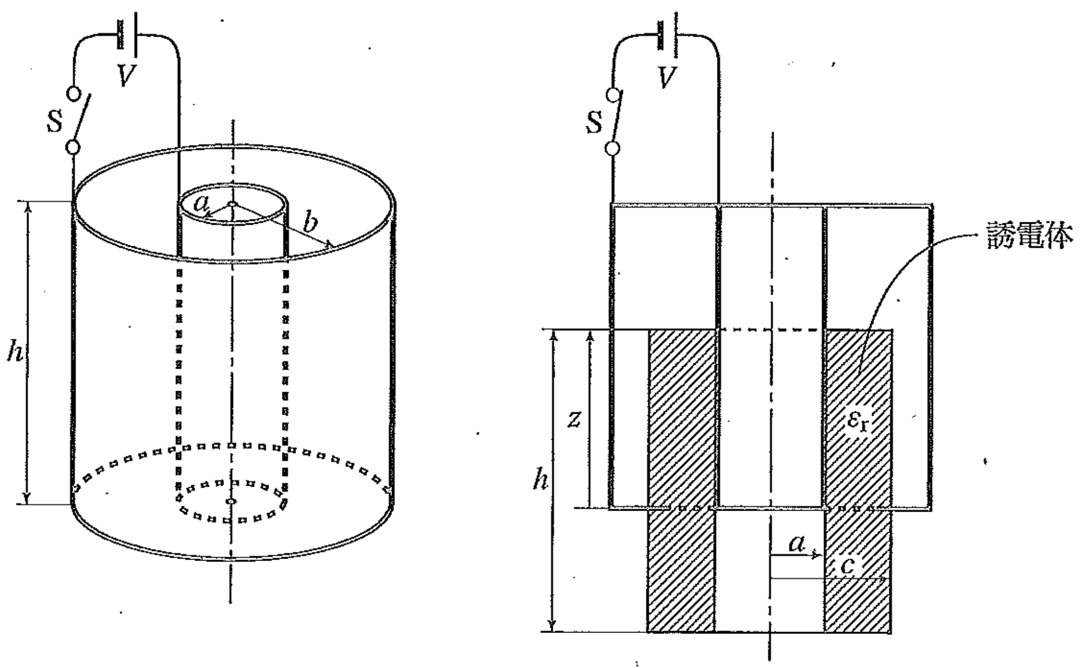
(1) 図1(a)のスイッチSを閉じたときに，内側の導体に蓄えられる電荷を求めよ．

(2) 問(1)において，導体間に蓄えられるエネルギーを求めよ．

(3) 次に，スイッチSを閉じたまま，内径a, 外径c ($a < c < b$)，高さh，比誘電率ε_rの誘電体を，図1(b)のように導体と中心軸が一致する状態で，下からゆっくりと導体間に挿入する．誘電体の端における電界の乱れ，および誘電体と電極の間の摩擦は無視できるものとする．図1(b)に示すように誘電体が距離zだけ入ったときの導体間の静電容量を求めよ．

(4) 問(3)において，誘電体を$z = h$の位置まで完全に挿入したとき, 導体間に蓄えられているエネルギーを求めよ．

(5) 問(4)の後，スイッチSを開き，誘電体を完全に引き抜いた後の２つの導体間の電位差を求めよ．



(a)　　(b) 誘電体が挿入されているときの断面図

図1