平成23年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程（前期課程）
入学試験問題

基礎部門

以下の注意をよく読みなさい．

1. 試験開始の合図があるまでは，この問題冊子を開いてはならない．

2. 問題は線形代数，微積分，常微分方程式，ベクトル解析，力学，電磁気学の6問があるが，その中から次の通り4問に解答すること．
   （1） 線形代数　および　微積分　の2問はともに必ず解答すること．
   （2） 常微分方程式，ベクトル解析，力学，電磁気学の4問の中から2問を選択して解答すること．3問以上に解答した場合には無効となることがあるので注意せよ．

3. 答案用紙は，予備1枚を含めて合計5枚ある．
   （1） 各問ごとに1枚ずつ答案用紙を用いよ．
   （2） 解答する問題の分野名（線形代数，微積分，常微分方程式，ベクトル解析，力学，電磁気学のいずれか）を各答案用紙の問題番号欄に記入せよ．
   （3） 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい．

4. 答案用紙には氏名を記入してはならない．

5. 問題用紙，答案用紙（予備を含む）はすべて回収するので，持ち帰らないこと．

問題は次のページから始まる.
このページは，下書きに用いてよい.

線形代数

３次元実線形空間 W のベクトル列 $\{\mathbb{x}_k\}\,(k=0,1,2,\cdots)$ は，$\mathbb{x}_0$ が与えられたとき $k \geq 1$ に対して，

$$\mathbb{x}_k = \mathbb{A}\mathbb{x}_{k-1}, \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 \\ \sqrt{2}b & a & \sqrt{2}b \\ 0 & \sqrt{2}b & a \end{pmatrix}$$

によって定まるものとする．ただし，a, b は定数 $(a>0,\ b>0)$ である．以下の問いに答えよ．

（１）行列 $\mathbb{A}$ の固有値を求めよ．

（２）上の問（１）で求めたそれぞれの固有値に対して，大きさが１である固有ベクトルを求めよ．

（３）任意の $\mathbb{x}_0 \in \mathrm{W}$ に対して $k \to \infty$ のとき $\mathbb{x}_k$ が零ベクトルに収束するために a, b が満たすべき条件を求め，a, b のとり得る値の範囲を a-b 平面上に図示せよ．

微積分

1．以下の問いに答えよ．

（1）関数$x\sqrt{4-x^2}$の不定積分を求めよ．ただし$|x|\leq 2$とする．

（2）関数$\sin^3 x$の不定積分を求めよ．

（3）球$x^2+y^2+z^2\leq 4$と円柱$(x-1)^2+y^2\leq 1$の共通部分の体積Vを求めよ．なお，上の問（1）と（2）の答えを用いてもよい．

2．x-y平面内にある曲線上の点(x, y)が，２次元極座標表示で$r=4+4\cos\theta \quad (0\leq\theta\leq\pi)$によって与えられる．ただし$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$である．以下の問いに答えよ．

（1）x，yそれぞれの最大値，最小値を求めよ．さらに，それらを与えるθを示せ．

（2）この曲線をx-y平面内に図示せよ．

（3）この曲線およびx軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

常微分方程式

１．以下の問いに答えよ．

（１）常微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+4y=0$ $(x>0)$ の一般解を求めよ．

（ヒント：$x=e^z$ とおくとよい．）

（２）常微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=\sin 2x$ の一般解を求めよ．

２．常微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 0,1)$$

について以下の問いに答えよ．

（１）変数変換 $y^{1-n}=u$ を行うと線形微分方程式に変形されることを示せ．

（２）以下の常微分方程式の一般解を求めよ．

１）$\dfrac{dy}{dx}+ay+by^4=0$ （a,b は定数，$a\neq 0$）

２）$x\dfrac{dy}{dx}+y=2x\sqrt{y}$

ベクトル解析

1．x, y, z を３次元空間における直交座標（デカルト座標）とし，$\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}$ をそれぞれ x, y, z 座標軸の正の向きの単位ベクトルとする．t をパラメータ（$0 \le t \le 6\pi$）とするベクトル関数

$$\mathbb{V}(t) = (t\cos t)\,\mathbb{i} + (t\sin t)\,\mathbb{j} + t\,\mathbb{k}$$

が表す曲線について以下の問いに答えよ．

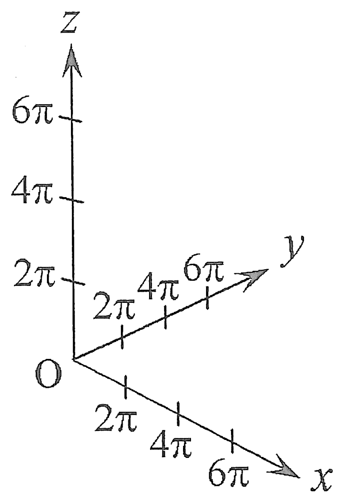


図１

（１）図１に示すデカルト座標を解答用紙に描き，この曲線を図示せよ．

（２）単位接線ベクトルを t の関数として求めよ．

（３）曲線の長さを求めよ．

（ヒント：以下の公式を用いてもよい．　ただし，$\log x$ は自然対数である．

$$\int \sqrt{a+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{a+t^2} + a\log\left|t+\sqrt{a+t^2}\right|\right) + C \qquad (a>0,\ C \text{ は積分定数})$$

）

2．x, y, z を３次元空間における直交座標（デカルト座標）とし，そこで定義されたベクトル場 $\mathbb{A}$ について考える．また，中心が原点にある半径 a の球のうち $z \ge 0$ の部分の半球面を S_1 とする．以下の問いに答えよ．ただし，面積分について，$d\mathbb{S}$ は面の微小部分の法線ベクトルで，大きさはその面積に等しく，この半球の内部から外向きを正とする．

（１）$\mathbb{A} = (y, xz, x^2)$ のとき，$\nabla \times \mathbb{A}$ を求めよ．

（２）上の問（１）の $\mathbb{A}$ に対する S_1 上の面積分 $\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbb{A}) \cdot d\mathbb{S}$ を求めよ．

（３）$\mathbb{A} = (2ax, ay, x^2)$ のとき，面積分 $\iint_{S_1} \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S}$ を求めよ．

力学

図１に示すように，xy 直交座標系の y 軸上の点Ｃを中心とし，原点Ｏを通る半径 r の円の一部を用いたなめらかなレールがある．このレール上の $x>0$ の側にある点Ｑから，点Ｑにおける接線方向に直線のなめらかなレールをつなぐ．図１のように s 軸をとり，点Ｑを $s=0$ とする．レールの先には質量の無視できるばね定数 k のばねが一方を固定されてとりつけられ，自然長となるときのばねの端が $s=s_0$ の位置にある．レール上（$x<0$ の側）に点Ｐをとり，角 OCP を α（$0<\alpha<\pi/2$）とする．また，角 OCQ を β（$\beta>0$）とおくとき，$\beta<\alpha$ であるものとする．y 軸の負の向きを鉛直方向下向きとし，重力加速度を g として，以下の問いに答えよ．

(1) 図１の点Ｐから，質量 m の質点（質点Ａとする）を静かに離したところ，質点Ａはレールを滑り，点Ｑを通過後，ばねの端に到達し，ばねと一体化して $s\geq 0$ で単振動を繰り返した．質点Ａとばねとの一体化によるエネルギーの損失はなく，ばねの自然長は s_0 に比べて十分大きいものとする．質点がばねの端に到達する条件および $s\geq 0$ で単振動する（振動の端が点Ｑを越えない）条件より，s_0 の範囲を α，β を用いて表せ．

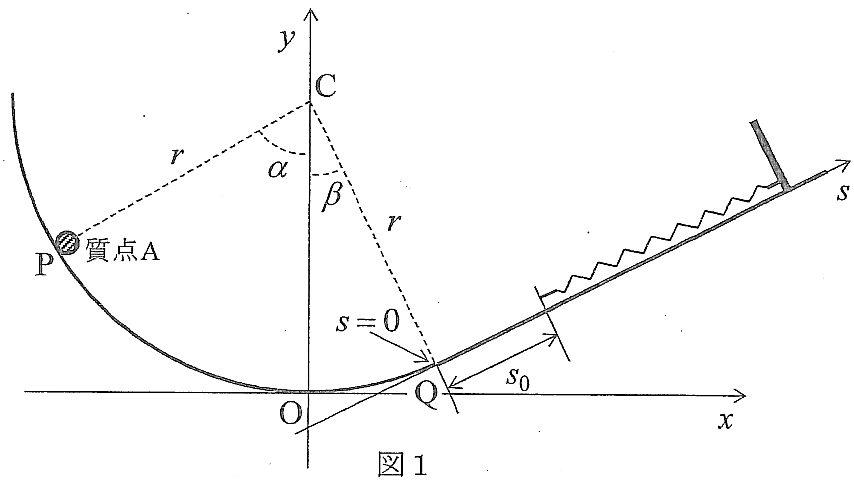


図１

(2) 次に図１のばねの固定されていない端に，質量 $2m$ の質点（質点Ｂとする）をとりつけ，ばねが釣合う位置で静かに離した（図２）．その後，図の点Ｐから質点Ａを静かに離したところ，質点Ａは点Ｑを通過後，質点Ｂと弾性衝突し，その後，質点Ｂは $s\geq 0$ で単振動を繰り返した．以下の問いに答えよ．ただし，質点Ａと質点Ｂとの２回目以降の衝突は考慮しないものとする．

1) 質点Ｂの衝突前の x 軸からの高さを h とする．質点Ａと質点Ｂの衝突後に質点Ａが到達する最も高い点（$x<0$ の側）の高さを求めよ．
2) 質点Ａと質点Ｂの衝突後，質点Ｂが単振動を行う際の運動方程式を s で表せ．

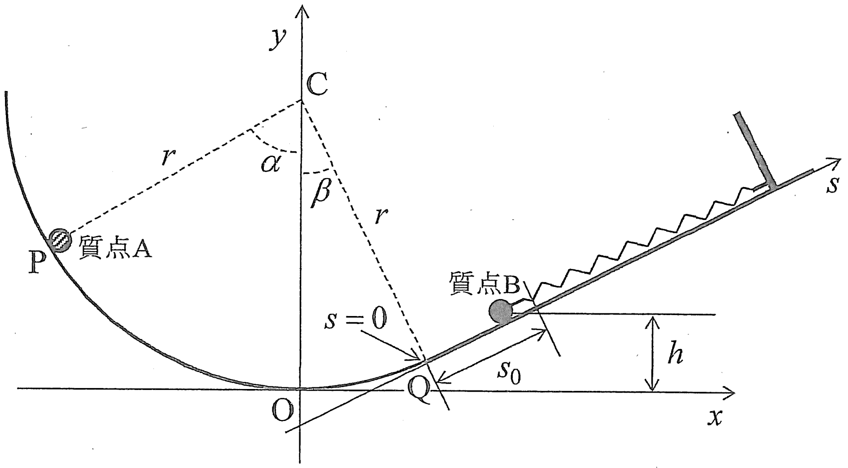
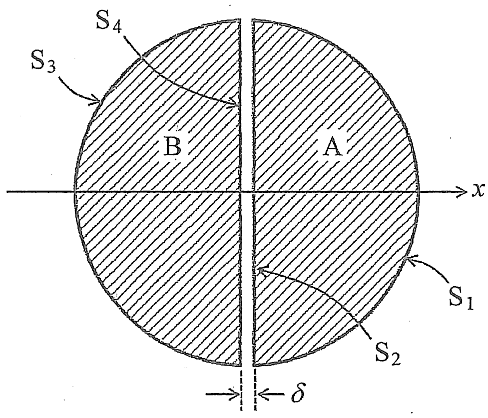


図２

3) 質点Ａと質点Ｂとの衝突の瞬間を $t=0$ として，2)の運動方程式を解け．また，振幅，周期を求めよ．ただし，衝突直前の質点Ａの速さを u_A とし，解答に u_A を用いてよい．

電磁気学



図

図において，A，B は半球に近い同一形状の導体であり，半径 R の球形の導体から，球の中心を含む厚さ δ の円板を取り除いてできるものである．導体 A の球面状の表面を S_1，平面状の表面を S_2 とし，導体 B の球面状の表面を S_3，平面状の表面を S_4 とする．δ は R に比べて十分小さいものとし，各面の面積が必要ならば，S_1，S_3 については $2\pi R^2$，S_2，S_4 については πR^2 と近似せよ．座標系として，球の中心を原点とし，x 軸が S_2, S_4 と垂直で導体 A が $x>0$ の側となるものをとる．無限遠方の電位を 0 として，以下の問いに答えよ．なお導体部以外の空間は真空（誘電率 ε_0）とする．結果を導出する過程を記述し，値は R，δ，ε_0 および導体 A，B が持つ電荷を用いて表すこと．

(1) 導体 A，B に共に電荷 Q を与えた場合の，各導体の電位を求めよ．ただし，各導体に与えた電荷は面 S_1，S_3 上に一様に分布し，空間 $r>R$（r は原点からの距離）における電界は半径 R の導体球に電荷 $2Q$ を与えた場合に等しいものとする．

(2) 導体 A に電荷 Q，導体 B に電荷 $-Q$ を与えた場合の，各導体の電位を求めよ．ただし，各導体に与えた電荷は面 S_2，S_4 上に一様に分布し，導体間の間隙内に一様な電界が生じるものとする．

(3) 導体 A に電荷 Q_1，導体 B に電荷 Q_2 を与えたとき，導体 A，B の電位をそれぞれ $V_1(Q_1,Q_2)$，$V_2(Q_1,Q_2)$ とすると，a，b を導体の形と相互の位置関係のみによって定まる定数として

$$V_1(Q_1,Q_2)=aQ_1+bQ_2 \quad \cdot\cdot\cdot ①$$
$$V_2(Q_1,Q_2)=bQ_1+aQ_2 \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

が成り立つ．(1)，(2)の結果を用いて a，b を求めよ．ただし，(1)，(2)の結果から a，b を導出する過程では新たな近似を追加しないこと．

(4) (3)の状態における系の静電エネルギーを $U(Q_1,Q_2)$ とすると，導体に微小電荷を与えるのに必要なエネルギーを積算することにより

$$U(Q_1,Q_2)=\int_0^{Q_1}V_1(q,0)dq+\int_0^{Q_2}V_2(Q_1,q)dq=\frac{1}{2}aQ_1^2+bQ_1Q_2+\frac{1}{2}aQ_2^2 \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

となる．また，このエネルギーは電界のエネルギーに等しい．(2)の場合について間隙内の電界のエネルギーを計算し，③式が与える値と一致することを示せ．