

平成23年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程(前期課程)
入学試験問題

基礎部門

以下の注意をよく読みなさい。

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題は線形代数、微積分、常微分方程式、ベクトル解析、力学、電磁気学の6問があるが、その中から次の通り4問に解答すること。
 - (1) 線形代数 および 微積分 の2問はともに必ず解答すること。
 - (2) 常微分方程式、ベクトル解析、力学、電磁気学の4問の中から2問を選択して解答すること。3問以上に解答した場合には無効となることがあるので注意せよ。
3. 答案用紙は、予備1枚を含めて合計5枚ある。
 - (1) 各問ごとに1枚ずつ答案用紙を用いよ。
 - (2) 解答する問題の分野名(線形代数、微積分、常微分方程式、ベクトル解析、力学、電磁気学のいずれか)を各答案用紙の問題番号欄に記入せよ。
 - (3) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい。
4. 答案用紙には氏名を記入してはならない。
5. 問題用紙、答案用紙(予備を含む)はすべて回収するので、持ち帰らないこと。

問題は次のページから始まる。
このページは、下書きに用いてよい。

線形代数

3次元実線形空間 W のベクトル列 $\{\mathbf{x}_k\} (k=0,1,2,\dots)$ は, \mathbf{x}_0 が与えられたとき $k \geq 1$ に対して,

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}, \quad A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 \\ \sqrt{2}b & a & \sqrt{2}b \\ 0 & \sqrt{2}b & a \end{pmatrix}$$

によって定まるものとする. ただし, a, b は定数 ($a > 0, b > 0$) である. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値を求めよ.
- (2) 上の問 (1) で求めたそれぞれの固有値に対して, 大きさが 1 である固有ベクトルを求めよ.
- (3) 任意の $\mathbf{x}_0 \in W$ に対して $k \rightarrow \infty$ のとき \mathbf{x}_k が零ベクトルに収束するために a, b が満たすべき条件を求め, a, b のとり得る値の範囲を a - b 平面上に図示せよ.

微積分

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $x\sqrt{4-x^2}$ の不定積分を求めよ. ただし $|x| \leq 2$ とする.

(2) 関数 $\sin^3 x$ の不定積分を求めよ.

(3) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ と円柱 $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ の共通部分の体積 V を求めよ. なお, 上の問

(1) と (2) の答えを用いてもよい.

2. x - y 平面内にある曲線上の点 (x, y) が, 2次元極座標表示で $r = 4 + 4\cos\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) によって与えられる. ただし $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ である. 以下の問いに答えよ.

(1) x , y それぞれの最大値, 最小値を求めよ. さらに, それらを与える θ を示せ.

(2) この曲線を x - y 平面内に図示せよ.

(3) この曲線および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

常微分方程式

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 常微分方程式 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 4y = 0$ ($x > 0$) の一般解を求めよ.

(ヒント: $x = e^z$ とおくとよい.)

(2) 常微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$ の一般解を求めよ.

2. 常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

について以下の問いに答えよ.

(1) 変数変換 $y^{1-n} = u$ を行うと線形微分方程式に変形されることを示せ.

(2) 以下の常微分方程式の一般解を求めよ.

1) $\frac{dy}{dx} + ay + by^4 = 0$ (a, b は定数, $a \neq 0$)

2) $x \frac{dy}{dx} + y = 2x\sqrt{y}$

ベクトル解析

1. x, y, z を3次元空間における直交座標（デカルト座標）とし、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ をそれぞれ x, y, z 座標軸の正の向きの単位ベクトルとする. t をパラメータ ($0 \leq t \leq 6\pi$) とするベクトル関数

$$\mathbf{V}(t) = (t \cos t) \mathbf{i} + (t \sin t) \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

が表す曲線について以下の問いに答えよ.

- (1) 図1に示すデカルト座標を解答用紙に描き、この曲線を図示せよ.
 (2) 単位接線ベクトルを t の関数として求めよ.
 (3) 曲線の長さを求めよ.

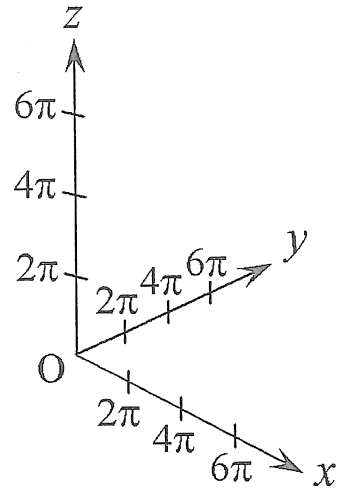


図1

（ヒント：以下の公式を用いてもよい。ただし、 $\log x$ は自然対数である。）

$$\int \sqrt{a+t^2} dt = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{a+t^2} + a \log |t + \sqrt{a+t^2}| \right) + C \quad (a > 0, C \text{ は積分定数})$$

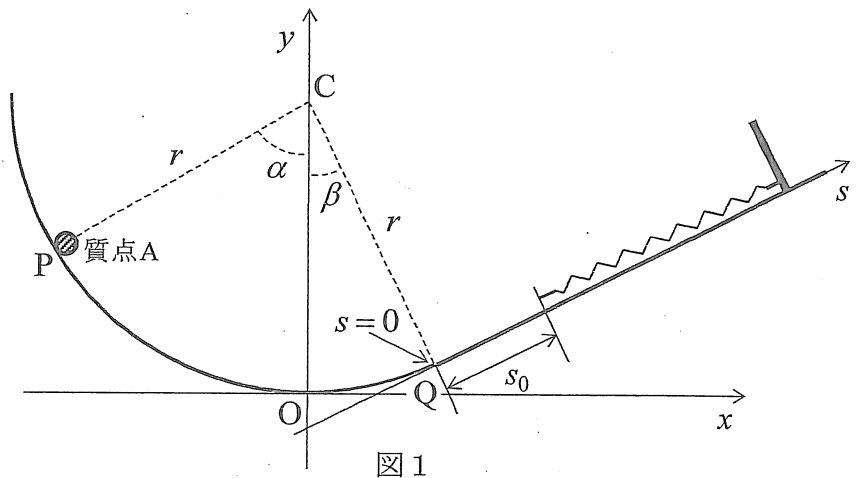
2. x, y, z を3次元空間における直交座標（デカルト座標）とし、そこで定義されたベクトル場 \mathbf{A} について考える. また、中心が原点にある半径 a の球のうち $z \geq 0$ の部分の半球面を S_1 とする. 以下の問いに答えよ. ただし、面積分について、 $d\mathbf{S}$ は面の微小部分の法線ベクトルで、大きさはその面積に等しく、この半球の内部から外向きを正とする.

- (1) $\mathbf{A} = (y, xz, x^2)$ のとき、 $\nabla \times \mathbf{A}$ を求めよ.
 (2) 上の問(1)の \mathbf{A} に対する S_1 上の面積分 $\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ を求めよ.
 (3) $\mathbf{A} = (2ax, ay, x^2)$ のとき、面積分 $\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ を求めよ.

力学

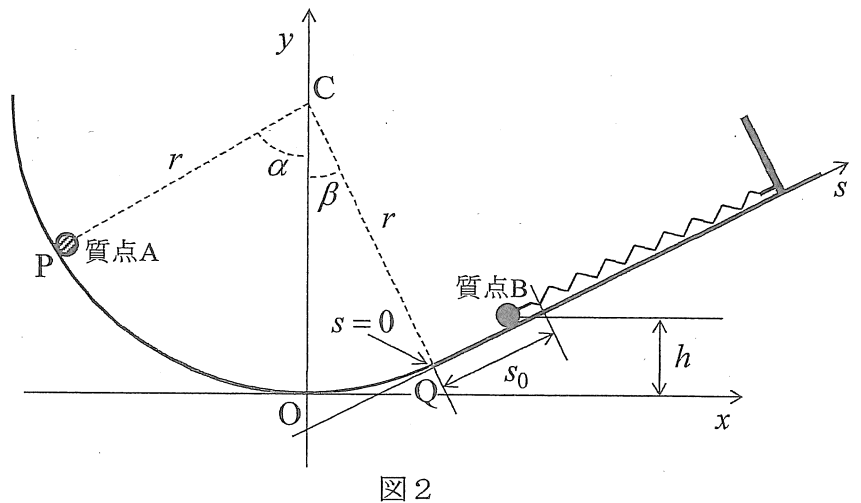
図1に示すように、 xy 直交座標系の y 軸上の点 C を中心とし、原点 O を通る半径 r の円の一部を用いたなめらかなレールがある。このレール上の $x>0$ の側にある点 Q から、点 Q における接線方向に直線のなめらかなレールをつなぐ。図1のように s 軸をとり、点 Q を $s=0$ とする。レールの先には質量の無視できるばね定数 k のばねが一方を固定されてとりつけられ、自然長となるときのばねの端が $s=s_0$ の位置にある。レール上($x<0$ の側)に点 P をとり、角 OCP を α ($0<\alpha<\pi/2$)とする。また、角 OCQ を β ($\beta>0$)とおくとき、 $\beta<\alpha$ であるものとする。 y 軸の負の向きを鉛直方向下向きとし、重力加速度を g として、以下の問いに答えよ。

(1) 図1の点 P から、質量 m の質点(質点Aとする)を静かに離したところ、質点Aはレールを滑り、点 Q を通過後、ばねの端に到達し、ばねと一体化して $s \geq 0$ で単振動を繰り返した。質点Aとばねとの一体化によるエネルギーの損失はなく、ばねの自然長は s_0 に比べて十分大きいものとする。質点がばねの端に到達する条件および $s \geq 0$ で単振動する(振動の端が点 Q を越えない)条件より、 s_0 の範囲を α, β を用いて表せ。



(2) 次に図1のばねの固定されていない端に、質量 $2m$ の質点(質点Bとする)をとりつけ、ばねが釣合う位置で静かに離した(図2)。その後、図1の点 P から質点Aを静かに離したところ、質点Aは点 Q を通過後、質点Bと弾性衝突し、その後、質点Bは $s \geq 0$ で単振動を繰り返した。以下の問いに答えよ。ただし、質点Aと質点Bとの2回目以降の衝突は考慮しないものとする。

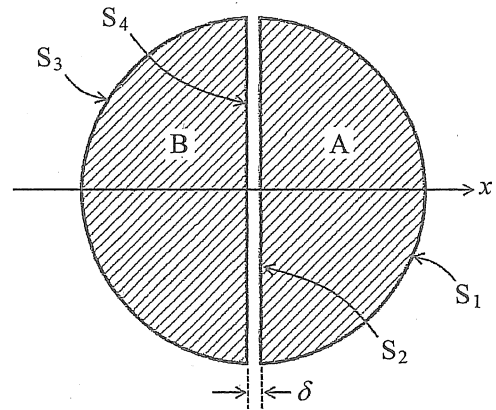
- 1) 質点Bの衝突前の x 軸からの高さを h とする。質点Aと質点Bの衝突後に質点Aが到達する最も高い点($x<0$ の側)の高さを求めよ。
- 2) 質点Aと質点Bの衝突後、質点Bが単振動を行う際の運動方程式を s で表せ。



- 3) 質点Aと質点Bとの衝突の瞬間を $t=0$ として、2)の運動方程式を解け。また、振幅、周期を求めよ。ただし、衝突直前の質点Aの速さを u_A とし、解答に u_A を用いてよい。

電磁気学

図において、A, B は半球に近い同一形状の導体であり、半径 R の球形の導体から、球の中心を含む厚さ δ の円板を取り除いてできるものである。導体 A の球面状の表面を S_1 、平面状の表面を S_2 とし、導体 B の球面状の表面を S_3 、平面状の表面を S_4 とする。 δ は R に比べて十分小さいものとし、各面の面積が必要ならば、 S_1, S_3 については $2\pi R^2$ 、 S_2, S_4 については πR^2 と近似せよ。座標系として、球の中心を原点とし、 x 軸が S_2, S_4 と垂直で導体 A が $x > 0$



図

の側となるものをとる。無限遠方の電位を 0 として、以下の問いに答えよ。なお導体部以外の空間は真空（誘電率 ϵ_0 ）とする。結果を導出する過程を記述し、値は R, δ, ϵ_0 および導体 A, B が持つ電荷を用いて表すこと。

- (1) 導体 A, B に共に電荷 Q を与えた場合の、各導体の電位を求めよ。ただし、各導体に与えた電荷は面 S_1, S_3 上に一様に分布し、空間 $r > R$ (r は原点からの距離) における電界は半径 R の導体球に電荷 $2Q$ を与えた場合に等しいものとする。
- (2) 導体 A に電荷 Q 、導体 B に電荷 $-Q$ を与えた場合の、各導体の電位を求めよ。ただし、各導体に与えた電荷は面 S_2, S_4 上に一様に分布し、導体間の間隙内に一様な電界が生じるものとする。
- (3) 導体 A に電荷 Q_1 、導体 B に電荷 Q_2 を与えたとき、導体 A, B の電位をそれぞれ $V_1(Q_1, Q_2)$ 、 $V_2(Q_1, Q_2)$ とすると、 a, b を導体の形と相互の位置関係のみによって定まる定数として

$$V_1(Q_1, Q_2) = aQ_1 + bQ_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$V_2(Q_1, Q_2) = bQ_1 + aQ_2 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。(1), (2)の結果を用いて a, b を求めよ。ただし、(1), (2)の結果から a, b を導出する過程では新たな近似を追加しないこと。

- (4) (3)の状態における系の静電エネルギーを $U(Q_1, Q_2)$ とすると、導体に微小電荷を与えるのに必要なエネルギーを積算することにより

$$U(Q_1, Q_2) = \int_0^{Q_1} V_1(q, 0) dq + \int_0^{Q_2} V_2(Q_1, q) dq = \frac{1}{2} a Q_1^2 + b Q_1 Q_2 + \frac{1}{2} a Q_2^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。また、このエネルギーは電界のエネルギーに等しい。(2)の場合について間隙内の電界のエネルギーを計算し、③式が与える値と一致することを示せ。

平成23年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程(前期課程)
入学試験問題

専門部門

以下の注意をよく読みなさい。

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。
2. 答案用紙は、予備1枚を含めて合計2枚ある。
 - (1) 解答する問題番号を記載の上、罫線が印刷された答案用紙1枚に解答せよ。
 - (2) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい。
3. 答案用紙には氏名を記入してはならない。
4. 問題用紙、答案用紙(予備を含む)はすべて回収するので、持ち帰らないこと。

問題は次のページから始まる。
このページは、下書きに用いてよい。

小論文

以下の(1), (2), (3)から1問を選択し, 解答せよ.

なお, 本問題は論理展開力を重視して採点するので, そのことに留意して論述せよ.

- (1) 大規模な計算機資源 (CPU, ストレージ) を自分では持たず, 必要に応じて他者の計算機資源をネットワーク経由で利用する手法は, 最近では「クラウド・コンピューティング」と呼ばれ注目されています. クラウド・コンピューティングが社会に与える影響, およびその有用性, 課題について, 複数の視点から論述しなさい.
- (2) 日本においては, 新たな成長のために環境・医療・健康分野における技術革新 (グリーン・イノベーション, ライフ・イノベーション) が求められています. あなたの興味がある研究分野が, これらのイノベーションに寄与する可能性について論述しなさい.
- (3) 20 世紀前半までの科学・技術の進展は, 理論と実験に支えられてきました. それ以降, 計算機が発展することで計算科学という新たな学問分野が誕生し, 現在では, 理論・実験・計算の3つが科学技術進展のカギとなっています. あなたの興味がある研究分野において, 計算科学に期待される役割と, 理論研究や実験研究との協働 (相互補完性) について論述しなさい.