平成22年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程(前期課程)
入学試験問題

基礎部門

以下の注意をよく読みなさい.

1. 試験開始の合図があるまでは, この問題冊子を開いてはならない.

2. 問題は線形代数, 微積分, 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学の6問があるが, その中から次の通り4問に解答すること.
   (1) 線形代数　および　微積分　の2問はともに必ず解答すること.
   (2) 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学の4問の中から2問を選択して解答すること. 3問以上に解答した場合には無効となることがあるので注意せよ.

3. 答案用紙は, 予備1枚を含めて合計5枚ある.
   (1) 各問ごとに1枚ずつ答案用紙を用いよ.
   (2) 解答する問題の分野名(線形代数, 微積分, 常微分方程式, ベクトル解析, 力学, 電磁気学のいずれか)を各答案用紙の問題番号欄に記入せよ.
   (3) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい.

4. 答案用紙には氏名を記入してはならない.

5. 問題用紙, 答案用紙(予備を含む)はすべて回収するので, 持ち帰らないこと.

線形代数

1．行列$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$について，以下の問いに答えよ．

（1）行列$\mathbf{A}$の固有多項式（固有値を求めるための多項式）を求めよ．

（2）$\mathbf{F(A)}=\mathbf{A}^5-\mathbf{A}^4-6\mathbf{A}^3-6\mathbf{A}-\mathbf{I}$を求めよ．ここで，$\mathbf{I}$は単位行列である．

必要であれば，次の「ケーリー・ハミルトンの定理」を用いよ．すなわち，n 次正方行列$\mathbf{C}$の固有多項式を

$$f_C(\lambda)=c_0\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\ \cdots\ +c_n$$

とすれば，

$$c_0\mathbf{C}^n+c_1\mathbf{C}^{n-1}+\ \cdots\ +c_n\mathbf{I}=\mathbf{O}$$

が成り立つ．ここで，$\mathbf{O}$はゼロ行列である．

2．以下の問いに答えよ．

（1）行列$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5 & -2\\ 2 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -2 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$の階数（ランク）を求めよ．　ただし，その導出過程を明記すること．

（2）上の問（1）の結果を参考にして，次の連立一次方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases}3x_1+x_2+5x_3-2x_4=-2\\ 2x_1+x_2+2x_3=3\\ 2x_1+2x_2-2x_3+4x_4=16\\ x_1+x_2+x_3+2x_4=1\end{cases}$$

微積分

1．次の問いに答えよ．ただし，x, y は実数とする．

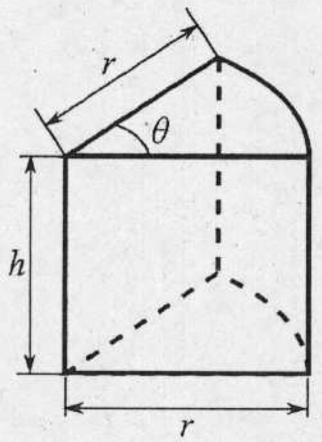
（1）積分変数 x, y を２次元極座標に変換して，次の定積分 S を求めよ．

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

（2）S を用いて，次のガウス積分 G を求めよ．

$$G=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$$

2．半径 r，高さ h の円柱から下図のように角度 θ だけ切り出した立体を考える．この立体の体積を V，表面積を S として，以下の問いに答えよ．ただし，$0<\theta<2\pi$ とする．なお，V は S 一定の条件下においてただ一つの極値（最大値）をもつことがわかっているとする．



（1）体積 V と表面積 S を r，h，θ の３変数を用いて表せ．

（2）上の問（1）の結果から h を消去し，V を r，θ，S の関数として表せ．

（3）上の問（2）で求めた関数の偏導関数 $\dfrac{\partial V}{\partial r}$，$\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial V}{\partial S}$ を求めよ．

（4）S 一定の条件下で V に極値を与える r，θ を求めよ．

（5）S 一定の条件下での V の最大値 $V_{\max}(S)$ を求めよ．

常微分方程式

1．常微分方程式

$$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=\sin x$$

について以下の問いに答えよ．

（1）常微分方程式の右辺を 0 とおいた斉次方程式（同次方程式）の一般解を求めよ．

（2）常微分方程式の特解を求めよ．

（3）常微分方程式の一般解で，条件 $y(0)=1$，$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=1$，$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}=0$ を満たす解を求めよ．

2．以下の常微分方程式の一般解を求めよ．なお，x, y は実数である．

$$(2xe^{3y}+e^x)dx+(3x^2e^{3y}-y^2)dy=0$$

ベクトル解析

1．ベクトル場 $\mathbf{A}=a^2y\mathbf{i}+axz\mathbf{j}+xz^2\mathbf{k}$ および $\mathbf{B}=ax\mathbf{i}-y\mathbf{j}+a^2z\mathbf{k}$ を考える．ここで，x, y, z はデカルト座標であり，$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ はそれぞれ x，y，z 方向の単位ベクトルを示す．以下の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．

（1）円柱面 S_1：$x^2+y^2=a^2$ と曲面 S_2：$z=2a^2-x^2-y^2$ の交線を C として，C に沿った線積分 $I=\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ の大きさ $|I|$ を求めよ．ただし，$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ である．

（2）球面 S_3：$x^2+y^2+z^2=a^2$ 上での面積分 $J=\int_{S_3}(\mathbf{B}+\mathrm{rot}\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS$ を求めよ．ここで，$\mathbf{n}$ は S_3 の外向き単位法線ベクトル，rot は回転を示す．（ヒント：ガウスの発散定理を用いよ．）

2．3つの3次元ベクトル $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ について以下の問いに答えよ．

（1）$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$ ならば，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ であることを証明せよ．

（2）$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ ならば，$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$ であることを証明せよ．

力学

図１のような密度ρ, 質量M, 長辺の長さ$4l$, 短辺の長さ$2l$, 厚さ$2h$の均質な直方体の剛体の板を考える．重心Gの座標は$(0, 0, 0)$であり，x, y, z軸と板の両端の交点はそれぞれ，$(\pm 2l, 0, 0)$, $(0, \pm l, 0)$, $(0, 0, \pm h)$である．

一般に連続体とみなせる剛体について剛体に固定した直交座標軸x, y, zをとるとき，z軸まわりの慣性モーメントI_zは，以下のように表わされる．

$$I_z = \iiint \rho(x, y, z)\left(x^2 + y^2\right) dxdydz$$

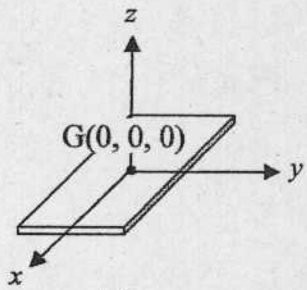


図１

(1) 図１の板について重心を通り，z軸を回転軸とするときの重心まわりの慣性モーメントI_{Gz}を上式に基づき計算し，Mとlを用いて表せ．

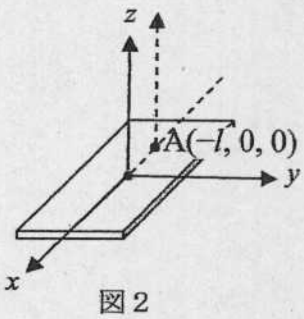


図２

(2) 図２のように点$A(-l, 0, 0)$を通り，z軸に平行な回転軸を考えたとき，この板の慣性モーメントI_{Az}をI_{Gz}，M, lを用いて表せ．

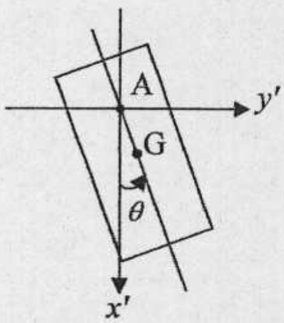


図３

(3) 図３のようにx'軸の正方向を鉛直下向きとして(2)で指定した回転軸をもつ剛体振り子を考える．(x', y', z'座標の原点を点Aとする．）重力加速度はgとし，この振り子の運動方程式を示せ．また，鉛直軸となす角θが十分小さいとき，この振り子の周期を求めよ．ただし，I_{Az}を用いてもよい．

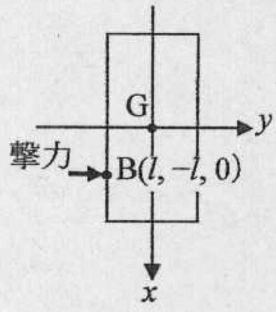


図４

(4) 図４のようにxy平面が水平面となるような面上にこの板をおき，点$B(l, -l, 0)$に$+y$方向の撃力を板に与えた場合を考える．撃力によって板に与えられたy方向の運動量はpである．その後の板の運動がどのようになるか，重心の運動と重心まわりの回転運動に分けて記せ．ただし，板と面の間の摩擦や空気抵抗などは無視できるものとし，重心の運動の記述にはMを，重心まわりの回転運動の記述にはI_{Gz}を用いよ．

電磁気学

図１に示すように，真空中（誘電率ε_0）に，厚さ d，互いに対向する面積 S の導体板３枚を，間隔が a と b-a（ただし $a < b/2$）になるように平行に並べる（以下，左から順に導体板１，２，３と呼ぶ）．また，連動して開閉するスイッチ SW_1 と電位差 V_0 の直流電源，スイッチ SW_2 が接続されている．導体板２はスイッチ SW_1 を通して接地が可能である．初期状態において，スイッチ SW_1，SW_2 は開放されているとする．導体板１の左端を原点とし，導体板１，２，３が並ぶ方向に x 軸をとる．導体板の端面から発生する電気力線は無視できるものとし，導体板間に発生する電気力線は一様で x 軸に平行になるものとする．

(1) スイッチ SW_1 を閉じ，スイッチ SW_2 は開放のままとする．

1) x 軸右向を正として電位 $V(x)$ と電界の x 成分 $E(x)$ を $0 \leqq x \leqq b+3d$ の範囲において式で表せ．次に，$V(x)$ と $E(x)$ を，x を横軸として図示せよ．

2) 導体板２の左面と右面の面電荷密度をそれぞれσ_1 とσ_2 として，これらを求めよ．

3) 導体板１，２間と導体板２，３間の静電容量をそれぞれ C_1 と C_2 として，これらを求めよ．

(2) 次に，スイッチ SW_2 は開放のまま，スイッチ SW_1 を開放する．

1) ３枚の導体板間に蓄えられている静電エネルギーU を，S，ε_0，σ_1，σ_2，a，b を用いて表せ．

2) 導体板２に働く力 F を，S，ε_0，V_0，a，b を用いて表せ．

(3) 次に，スイッチ SW_1 は開放のまま，スイッチ SW_2 を閉じる．そして，導体板２を導体板１，２間，導体板２，３間がともに $b/2$ となるようにゆっくりと x 軸方向に動かした．このとき，導体板２の左面と右面の面電荷密度をそれぞれ σ_1' と σ_2' として，これらを，ε_0，V_0，a，b を用いて表せ．

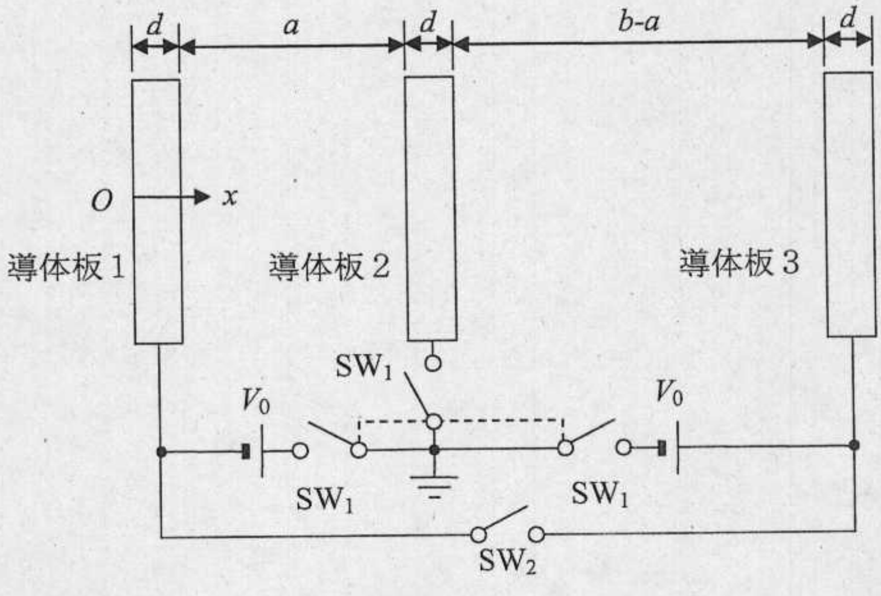


図１