平成21年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程（前期課程）
入学試験問題

基礎部門

以下の注意をよく読みなさい。

1. 試験開始の合図があるまでは，この問題冊子を開いてはならない。

2. 問題は線形代数，微分・積分，応用数学Ⅰ，応用数学Ⅱ，力学，電磁気学の6問があるが，その中から次の通り4問に解答すること。
   (1) 線形代数　および　微分・積分　の2問はともに必ず解答すること。
   (2) 応用数学Ⅰ，応用数学Ⅱ，力学，電磁気学の4問の中から2問を選択して解答すること。3問以上に解答した場合には無効となることがあるので注意せよ。

3. 答案用紙は，予備1枚を含めて合計9枚ある。
   (1) 各問ごとに2枚ずつ答案用紙を用いよ。
   (2) 解答する問題の分野名（線形代数，微分・積分，応用数学Ⅰ，応用数学Ⅱ，力学，電磁気学のいずれか）を各答案用紙の問題番号欄に記入せよ。
   (3) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい。

4. 答案用紙には氏名を記入してはならない。

5. 問題用紙，答案用紙（予備を含む）はすべて回収するので，持ち帰らないこと。

線形代数

1．行列 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

（1）$\mathbf{A}$ の固有値をすべて求めよ．

（2）$\mathbf{A}$ は直交行列 $\mathbf{P}$ によって対角行列 $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}$ に変換される．$\mathbf{P}$ を求めよ．ただし，$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ は $\mathbf{P}$ の転置を表わす．$\mathbf{P}$ として二つ以上の表現が可能なときは，そのうちの一つを答えよ．

2．ある物質はAとBという２つの状態のどちらかをとる．光を１回照射すると，Aの状態にあった物質がBの状態に移る確率は30パーセント，Bの状態にあった物質がAの状態に移る確率は40パーセントである．最初にAの状態にある確率を a_0，Bの状態にある確率を b_0 とし，n 回光を照射したあとAの状態にある確率を a_n，Bの状態にある確率を b_n とする．以下の問いに答えよ．

（1）a_1，b_1 を a_0，b_0 を用いて

$$\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=\mathbf{W}\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}$$

とするとき，行列 $\mathbf{W}$ を書け．

（2）行列 $\mathbf{W}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

（3）上の問（2）の結果を用いて a_n，b_n を a_0，b_0 を用いて表せ．

（4）$n\to\infty$ としたときの a_n と b_n の比の極限を求めよ．

微分・積分

1．以下の不定積分を求めよ．

$\int a^x \cos 2x \, dx$ （ただし a は正の定数であり $a \neq 1$ とする．）

2． $f(x,y) = \cos(x - 5y + 2xy)$ を $x = 0$，$y = 0$ において x，y についてテイラー展開せよ．ただし x，y の３次以上の項は省略し，２次の項まで求めよ．

3．直交座標 x，y，z で表される３次元空間中で，次の条件を満たす領域の体積 V を求めたい．

$$x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}y^2 + z^{\frac{2}{3}} \leq c^2$$

ただし c は正の定数である．以下の問いに答えよ．

（1）$x = s^3$，$y = 2t$，$z = u^3$ と変数変換したときのヤコビアン(ヤコビ行列式) $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,u)}$ を求めよ．

（2）V を s，t，u の積分として表せ．また，その積分の領域を s，t，u を用いた数式で表せ．

（3） $s = r\sin\theta\cos\varphi$，$t = r\sin\theta\sin\varphi$，$u = r\cos\theta$ と変数変換して s，t，u を極座標 r，θ，φ で表したときのヤコビアン(ヤコビ行列式) $\dfrac{\partial(s,t,u)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ を求めよ．

（4）V を r，θ，φ の積分として表し，V を求めよ．

応用数学 I

以下の問いに答えよ．

(1) 常微分方程式 $xy\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$ を解け．

(2) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+y=2xy^2e^x$ を $u=\dfrac{1}{y}$ とおいて解け．

(3) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=x+y+1$ を解け．ただし $y(x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開を用いよ．

(4) 常微分方程式 $\dfrac{d^5y}{dx^5}-3\dfrac{d^4y}{dx^4}+3\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ を解け．

応用数学Ⅱ

ベクトル場を$\mathbf{P}=\left(\frac{1}{2}z^2x, \frac{x^2y-z^2y}{2}, -\frac{1}{2}zx^2\right)$とする．また，$x^2+y^2=R^2, z=b$（ただし$b$は正の定数）で定義される円を$C$とする．

(1) $\mathbf{P}$の発散を求めよ．

(2) $\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{P}$として$\nabla\times\mathbf{A}$を求めよ．

(3) 円C上の線積分$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$を求めよ．ただし，$d\mathbf{r}$は$C$上の線素ベクトルであり，円$C$が囲む平面を左に見る向きを正とする．（ヒント：ストークスの定理を用いよ．）

力学

質量の無視できる十分に長いつるまきばねが天井から吊り下げられている（図 1a）．以下では鉛直方向下向きを z 軸の正の向きとする．このつるまきばねの下端に質量 m の質点をつないで鉛直方向にゆっくり下ろしたところ，ばねが自然長から l だけ伸びて質点は静止した（図 1b）．このときの質点の位置を $z = 0$ とする．重力加速度を g，時刻を t として，与えられた記号のみを用いて以下の問いに答えよ．ただし，空気抵抗は考えない．

(1) 質点を $z = 2l$ の位置まで下げて静止させ（図 1c），そのあと静かに離した．このとき，質点は重力とともに，自然長からの伸び（縮み）に比例した復元力を受けながら運動する．

1) このばねのばね定数（復元力と自然長からの伸び（縮み）との比例係数）を，m, g, l を用いて表し，その結果を用いて，このときの質点の運動方程式を z で表せ．

2) 質点を離した瞬間を $t = 0$ として，1)の運動方程式を z について解き，この質点の運動（単振動）の振幅と周期を求めよ．

(2) 前問(1)と同じつるまきばねを用い，図 1d のように水平な板で質量 m の質点を $z = -l$ の位置で支えて，ばねを自然長に保っている．この状態から，板を初速度 0，一定の加速度 $a\,(< g)$で鉛直方向下向きに移動させる．

1) 質点が板から受ける垂直抗力の大きさを N として，板が質点と接触しながら移動しているときの質点の運動方程式を表せ．

2) やがて板は質点から離れ，そのあと，質点は単振動を繰り返す．板が質点から離れた瞬間の質点の位置と速度，および，それ以降の単振動の振幅をそれぞれ求めよ．

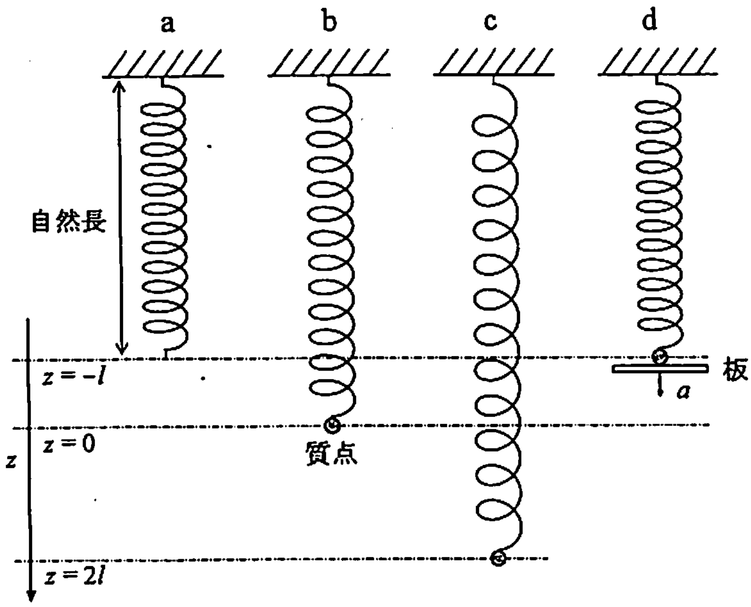

図 1

電磁気学

図１～図３に示すように，半径aの導体球Ａ（以下導体Ａとよぶ）をそれと同心の内半径dの導体球殻Ｂ（以下導体Ｂとよぶ）が包んでいる．導体Ａの中心を原点とし，原点からの距離をrとする．導体Ａの表面上（$r=a$）には電荷$+Q$が，そして導体Ｂの内面上（$r=d$）には電荷$-Q$が与えられ，電荷はそれぞれの球面上で一様に分布しているものとする．

(1) 導体ＡとＢの間に，内半径b，外半径cの球殻を同心状におく．導体ＡとＢの間で何も挿入されていない領域は真空（誘電率ε_0）とする．

1) 図１に示すように，球殻が導体の場合について，ガウスの法則を用いて導体ＡとＢの間における真空部分の電界の大きさと，挿入した導体内部の電界の大きさをそれぞれ求め，原点からの距離rの関数で示せ．

2) 図２に示すように，球殻が誘電体（誘電率ε）の場合について，ガウスの法則を用いて導体ＡとＢの間の電束密度D，及び導体ＡとＢの間の真空部分の電界の大きさと誘電体内部の電界の大きさを求め，原点からの距離rの関数で示せ．

3) 2)について，導体ＡとＢの間の電位差Vと静電容量Cを求めよ．また，導体ＡとＢの間を全て誘電体（誘電率ε）で満たしたときの導体ＡとＢの間の電位差V_fと静電容量C_fを求めよ．

(2) 図３に示すように，導体ＡとＢの間を誘電体１（誘電率ε_1）と誘電体２（誘電率ε_2）とで満たした場合を考える．

1) 導体ＡとＢの間で原点からの距離rに対する電界の大きさEの変化を$\varepsilon_1>\varepsilon_2$と$\varepsilon_1<\varepsilon_2$のそれぞれの場合について，電界の大きさ$E$を縦軸，距離$r$を横軸として図示せよ．なお，図中には$r=a,h,d$それぞれに対応する電界の大きさを示せ．

2) $d=4a$とし，各誘電体の電界が以下の二つの条件を同時に満たすための，ε_1とε_2の比およびhとaの比を，ともに整数で示せ．

- 誘電体１及び２におけるそれぞれの電界の最大値が等しい．
- 誘電体１及び２におけるそれぞれの電界の最小値が等しい．

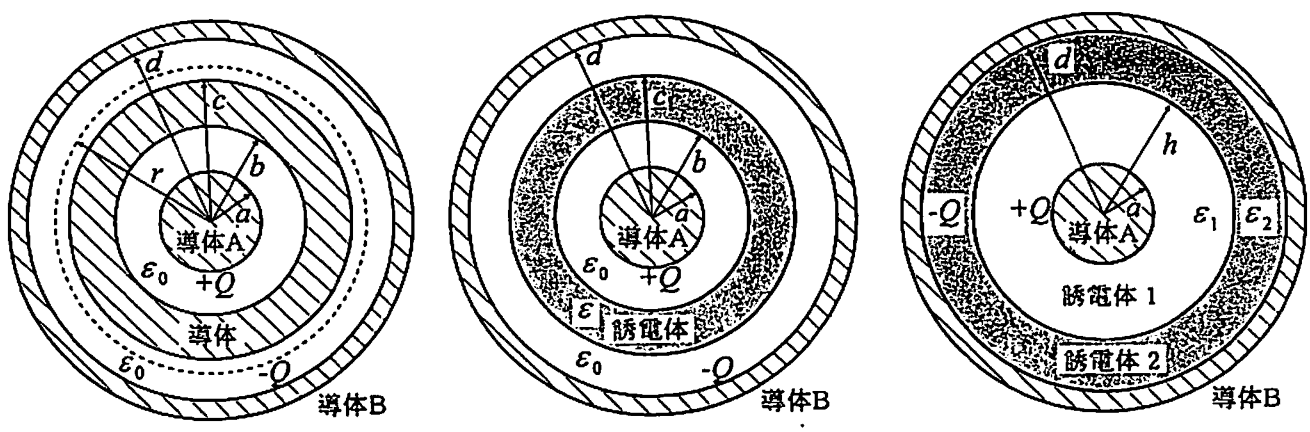

図１　　図２　　図３