平成20年度
名古屋大学大学院工学研究科
計算理工学専攻博士課程（前期課程）
入学試験問題

基礎部門

以下の注意をよく読みなさい。

1. 試験開始の合図があるまでは，この問題冊子を開いてはならない。

2. 問題は線形代数，微分・積分，応用数学，離散数学，力学の5問があるが，その中から次の通り4問に解答すること。
   (1) 線形代数　および　微分・積分　の2問はともに必ず解答すること。
   (2) 応用数学，　離散数学，　力学　の3問の中から2問を選択して解答すること。これら3問のすべてに解答した場合には無効となることがあるので注意せよ。

3. 答案用紙は，予備１枚を含めて合計5枚ある。
   (1) 各問ごとに1枚ずつ答案用紙を用いよ。
   (2) 選択した問題の分野名（線形代数，微分・積分，応用数学，離散数学，力学のいずれか）を問題番号欄に記入せよ。
   (3) 予備の答案用紙を下書き用紙として使用してよい。

4. 答案用紙には氏名を記入してはならない。

5. 問題用紙，答案用紙（予備を含む）はすべて回収するので，持ち帰らないこと。

線形代数

1．行列

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と半径 1 の球体

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1 \right\}$$

を考える．次の問に答えよ．

1) 行列 A の固有値・固有ベクトルの対を全て計算せよ．ただし，固有ベクトルは長さが 1 となるよう正規化すること．

2) 行列 A によって定まる一次変換により，球体 B が写される先

$$AB = \left\{ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in B \right\}$$

の図形を式で表せ．

2．任意の実数 x に対して次式が成り立つ．

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

これらと同様に，A を 2×2 行列として，無限級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k} = I - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \cdots$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1} = A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \cdots$$

が収束するとき，これらをそれぞれ $\cos A, \sin A$ と書くことにする．ただし，I は 2×2 単位行列であり，$A^0 = I$ とする．以下では λ を実数とし，

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \lambda I + N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

とする．次の問に答えよ．

1) $\cos N, \sin N$ を求めよ．
2) k を 0 以上の整数とするとき，A^k は

$$A^k = \alpha_k I + \beta_k N$$

の形となる．実数 α_k, β_k を λ, k を用いて表せ．

3) $\cos A$ を $\cos \lambda, \sin \lambda$ を用いて表せ．

微分・積分

1．次の問に答えよ．

$y = \tan^{-1}\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ．ただし $-1 < x < 1$ とする．

2． $x > 0$ において次の不等式が成立することを示せ．

$$\frac{x}{1+x} < (x+1)\log(1+x)$$

3．実数 x を変数とする何回でも微分可能な関数 $f(x)$ を考える．次の問に答えよ．

n を自然数とし，

$$g_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \int_0^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

とおく．ただし，$f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(n)}(x)$ はそれぞれ $f(x)$ を 1, 2, n 回微分したものを表す．数学的帰納法を用いて，$f(x) = g_n(x)$ が成り立つことを示せ．

応用数学

1．次の微分方程式の一般解を求めよ．

1） $$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{xy}$$

2） $$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=xe^{2x}$$

2．原点を中心とする半径 a の球体を考える．半径 r $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ の球表面を S とし，S 上の外向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．また，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ とおき，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\begin{cases} a^3\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} & (r>a) \\ \boldsymbol{r} & (r\leqq a) \end{cases}$$

と定義する．次の問に答えよ．

1) div$\boldsymbol{A}$ を求めよ．

2) 球表面 S 上の面積分 $\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ の値を求めよ．

離散数学

N を 1 より大きな整数とする。次の条件 1 及び条件 2 を満たす長さ N の配列 $a = (a[1], a[2], \ldots, a[N])$ の集合を，$A(N)$ とする。

条件 1: 各 $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ に対し，$a[i]$ は，$-2N \leq a[i] \leq 2N$ を満たす整数である。

条件 2: $a[1] < a[2] < \cdots < a[N]$ である。

1) 集合 $A(N)$ の要素数を N の式で表せ。これを用いて，$A(4)$ の要素数を求めよ。

次に，整数 K (ただし，$-N \leq K \leq N$) と，配列 $a \in A(N)$ を入力とし，以下の動作をするアルゴリズム X を考える。

- $a[i] = K$ を満たす $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ が存在するとき，i を出力する。
- $a[i] = K$ を満たす i が存在しないときは，そのことを示す特殊な記号 $\perp$ を出力する。

2) ある整数 K (ただし，$-N \leq K \leq N$) と，集合 $A(N)$ から一様分布に従ってランダムに選んだ配列 a を，X へ入力したとする。X が $\perp$ を出力する確率を N の式で表せ。同様に，X が i を出力する確率を N と i と K の式で表せ。

3) 前問 2) の結果を用いて，$N = 4$，$K = 2$ のときに，X が $\perp$ を出力する確率，1 を出力する確率，2 を出力する確率，3 を出力する確率，4 を出力する確率をそれぞれ求めよ。

4) アルゴリズム X を二分探索法を用いて記述せよ。アルゴリズムの記述には，適当な擬似コードを用いてもよいし，適当なプログラミング言語を用いてもよい。ただし，二分探索法とは，以下の事実に基づく探索法である。

   - ある $i \in \{2, 3, \ldots, N\}$ に対し，$a[i] < K$ であれば，任意の $j \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$ に対し，$a[j] < K$ である。
   - 同様に，ある $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ に対し，$a[i] > K$ であれば，任意の $j \in \{i+1, i+2, \ldots, N\}$ に対し，$a[j] > K$ である。

力学

1．長さℓ，質量Mの細長い剛体棒が，図1に示すように，重力により鉛直面内で軸Oのまわりに回転振動している。軸Oのまわりの回転は滑らかであるとする。重力加速度をgとして，次の問に答えよ。

1) 軸Oに関する剛体棒の慣性モーメントIをMとℓによって表せ。

2) 剛体棒の，静的平衡位置からの回転角θは微小であるとして，角振動数を求めよ。

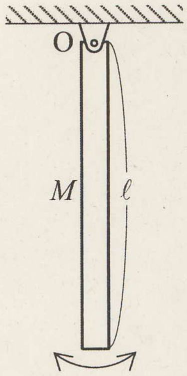

図1

2．図2に示すように，長さℓ，質量Mの細長い剛体棒2本がそれぞれ軸O_1，O_2のまわりに重力により鉛直面内で回転振動しており，棒の先端には長さの等しい3個のバネが取り付けられている。軸O_1，O_2のまわりの回転は滑らかであり，3個のバネのバネ定数はいずれもkであるとする。重力加速度をgとして，次の問に答えよ。

1) 2本の剛体棒の，静的平衡位置からの回転角θ_1，θ_2は微小であるとして，運動方程式を書け。

2) 上記小問1) の運動方程式を解いて，2本の剛体棒の固有角振動数を求めよ。また，求めた固有角振動数での振動モード（2本の剛体棒の回転振動の様子）を図示せよ。

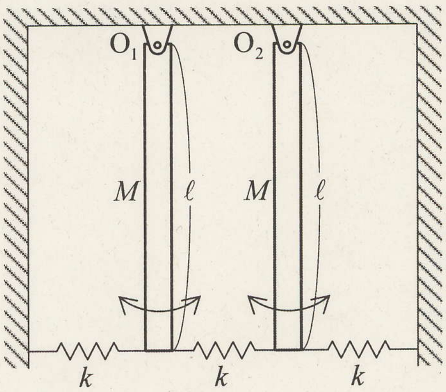

図2