

## 離散数学

2つの整数  $x$  と  $y$  (ただし,  $1 \leq x \leq y$ ) を入力とし, 整数  $z$  を出力するアルゴリズム A を考える。図 1 は A の擬似コードであり, 図 2 はその動作の流れを図示している。

```
algorithm A(x, y)
  while x ≠ 0 do {
    r ← (y mod x)
    y ← x
    x ← r
  }
  z ← y
  return z
```

図 1: A の擬似コード

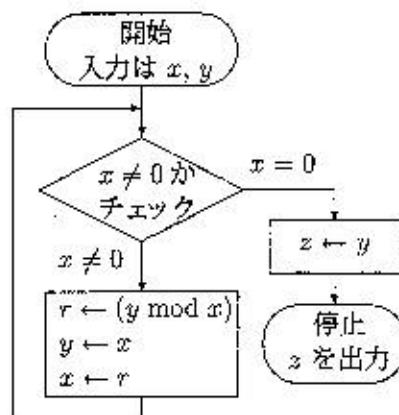


図 2: A の動作の流れ

ただし,  $r$  は整数変数,  $\leftarrow$  は代入演算,  $(y \bmod x)$  は  $y$  の  $x$  による除算の剰余である。すなわち,  $y$  は非負整数  $a$  と  $b$  を用いて  $y = ax + b$  (ただし  $0 \leq b < x$ ) と書け, このとき  $(y \bmod x)$  は  $b$  となる。たとえば  $(7 \bmod 3)$  は 1 である。以下の各問に答えよ。

- 1)  $x = 60, y = 84$  を入力としたときの  $z$  の値を求めよ。
- 2) 一般に, 入力  $x$  と  $y$  に対し, A はどのような  $z$  を出力するか, 簡潔に述べよ。
- 3) 任意の入力  $x$  と  $y$  (ただし,  $x, y$  は整数で  $1 \leq x \leq y$  を満たす) に対し, アルゴリズム A は必ず停止し,  $z$  を出力することを示せ。

次に, このアルゴリズム A の計算量を

「 $(y \bmod x)$  を計算する回数」

で考える。たとえば,  $x = 2, y = 4$  を入力としたときの計算量は 1 であり,  $x = 3, y = 7$  を入力としたときの計算量は 2 である。以下の各問に答えよ。

- 4)  $x = 55, y = 89$  を入力としたときの計算量と  $z$  の値を求めよ。また,  $z$  を計算する過程で現れる  $r$  の値をすべて列挙せよ。
- 5) 計算量が 12 であり,  $z$  が 5 となる  $x$  と  $y$  の組を一組求めよ。必要であれば, 問 4) の結果を用いてよい。