応用数学

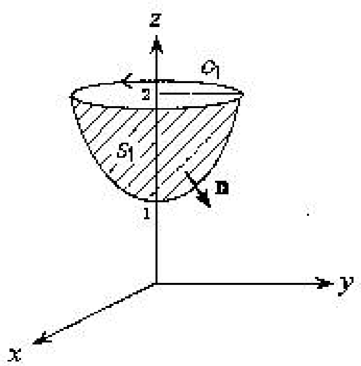
1．次の問に答えよ。

1）微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}(x^2-1)=2y$ の一般解を求めよ。

2）微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}-y=x$ の一般解を求めよ。

3）微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+2y=\sqrt{y}$ を，$u=\sqrt{y}$ とおいて，$x=0$ で $y=a$ の条件を満たす解を求めよ。ここで a は正の実数とする。

2．回転放物面 $z=x^2+y^2+1$ において，下図のように $1\leq z\leq 2$ を満たす部分を S_1 とし，S_1 上の外向きの単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。また，閉曲線 $x^2+y^2=1, z=2$ を C_1 とする。さらに，$\mathbf{r}=(x,y,z)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおき，ベクトル場 $\mathbf{A}$ を $\mathbf{A}(\mathbf{r})=\mathbf{r}/r^3$ により定義する。このとき，次の問に答えよ。



1）$\mathbf{A}$ の C_1 上での線積分 $\int_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ を求めよ。ただし $d\mathbf{r}$ は C_1 上の線素ベクトルである。

2）$\mathbf{A}$ の S_1 上での面積分 $\int\int_{S_1}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$ を求めよ。ただし dS は S_1 上の面素である。
（ヒント： ガウスの発散定理を用いよ。）