

線形代数

1. 連立1次方程式 $Ax = b$ を考える。ただし,

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とする。次の問に答えよ。

- 1) $|A| = 0$ となるような定数 a の値を求めよ。
- 2) $|A| = 0$ のとき、行列 A の階数を求めよ。
- 3) $|A| = 0$ のとき、 $Ax = b$ が解をもつような b 、およびそのときの解を求めよ。

2. A を n 次実対称行列とする。 A の固有値を λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)、 λ_i に対応する正規化された固有ベクトルを u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とし、 n 次正方行列 P を

$$P = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$$

とする。また、線形変換 $v \rightarrow Av$ および $v \rightarrow Pv$ を考える。このとき、以下の問に答えよ。

- 1) P によって、原点が不変であること、および任意の2点間の距離が不変であることを示せ。
- 2) 1)の結果に基づき、 $n = 2$ のとき P はどのような操作を表すかを述べよ。
- 3) $n = 2$ のとき A はどのような操作を表すか。