# 応用数学

$(x, y, z)$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の直交座標, $r$ を原点からの距離 $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, また $f = r^m$, $\boldsymbol{v} = \mathrm{grad} f$ とするとき, 以下の問に答えよ.

1) ベクトル $\boldsymbol{v}$ の直交座標系における成分を求めよ.

2) 次の (a), (b) それぞれの場合について指数 $m$ の値を求めよ. ただし, $m < 0$ とする.
(a) 原点以外で, $\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = 0$ が成り立つ場合. ただし, ある関数 $\Phi$ が $r$ のみの関数で $\Phi = \Phi(r)$ と書けるとき,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left\{ r^2 \frac{\mathrm{d}\Phi(r)}{\mathrm{d}r} \right\}$$

となることを用いてよい.
(b) 原点を中心とする半径 $R(\neq 0)$ の球面 $S$ 上の面積分

$$I_R = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S$$

の値が半径 $R$ によらない場合. ただし, $\boldsymbol{n}$ は $S$ 上の外向き単位法線ベクトルである.

3) 上記 2) の (b) が成り立つように指数 $m$ が与えられるとき, 点 $(2, 0, 0)$ を中心とする半径 $1$ の球面 $S_1$ 上の面積分

$$I = \int_{S_1} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は $S_1$ 上の外向き単位法線ベクトルである.