離散数学

N 個の複素数データ $\{a(0), a(1), \ldots, a(N-1)\}$ に対し，次の式で定義される $\{c(0), c(1), \ldots, c(N-1)\}$ を $\{a(j)\}_{j=0}^{N-1}$ の**離散フーリエ変換**と呼ぶ。

$$c(k) = \sum_{j=0}^{N-1} a(j) \exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{1}$$

ただし，i は虚数単位を表す。いま，$N = 2^p$（p は 1 以上の整数）とするとき，この離散フーリエ変換を高速に計算するアルゴリズムを次の手順により設計せよ。

(1) 定義式をそのまま用いて $\{c(k)\}_{k=0}^{N-1}$ を計算するときの計算量を求めよ。ただし，複素数の四則演算はすべて 1 演算と数え，$\exp(-2\pi ijk/N)$ は数表により与えられていると仮定してその計算量は考慮しないとする。また，計算量は N に関するオーダー（$O(N^3)$ など）のみを答えればよい。

以下では，$q = 0, 1, \ldots, p$ に対し，$2^{p-q} \times 2^q$ の複素数配列 $X_q(j,k)$ を次のように定義する。

$$X_q(j,k) = \sum_{m=0}^{2^q-1} a(2^{p-q}m + j) \exp\left(-\frac{2\pi imk}{2^q}\right) \tag{2}$$
$$(j = 0, 1, \ldots, 2^{p-q}-1, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^q - 1)$$

この配列の値を $X_0(j,k)$ から始めて $X_1(j,k), X_2(j,k), \ldots, X_p(j,k)$ と順に計算していくことにより，離散フーリエ変換を計算するアルゴリズムを考える。

(2) $X_0(j,0) = a(j)$（$j = 0, 1, \ldots, N-1$）および $X_p(0,k) = c(k)$（$k = 0, 1, \ldots, N-1$）が成り立つことを示せ。

(3) $X_{q+1}(j,k)$ は $X_q(j,k)$ から次の式により計算できることを示せ。

$$X_{q+1}(j,k) = X_q(j,k) + X_q(j + 2^{p-q-1}, k) \exp\left(-\frac{2\pi ik}{2^{q+1}}\right) \tag{3}$$
$$(j = 0, 1, \ldots, 2^{p-q-1}-1, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{q+1} - 1)$$

ただし，$0 \le q \le p-1$ とし，右辺において k が 2^q 以上となった場合は，$\bmod 2^q$ で考えるとする。

(4) 小問 2)，3) の結果を使って $\{a(j)\}_{j=0}^{N-1}$ の離散フーリエ変換を求めるアルゴリズムを書け。なお，アルゴリズムの記述には適当なプログラミング言語を用いてもよい。

(5) 小問 4) のアルゴリズムの計算量を求めよ。なお，計算量を求めるに当たっての条件は小問 1) と同様とする。