

応用数学

I. 以下の問に答えよ .

1) 線形微分方程式

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (a, b, c \text{ は定数})$$

は変数変換 $x = e^t$ によりつぎの定数係数の線形微分方程式になることを示せ .

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + (b - a) \frac{dy}{dt} + cy = 0.$$

2) 上のことを用いて方程式

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = (\log x)^2$$

を解け .

II. 3次元ベクトル場 \mathbf{A} が $\mathbf{A} = (x - 2y, y - 2z, z - 2x)$ で与えられているとする . 6つの平面 $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ によって囲まれた立方体を V , その表面を S とする .

1) 面積分 $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$ をその定義に従って計算せよ . ただし , \mathbf{n} は S の外向き単位法線ベクトルを表す .

2) 体積分 $\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV$ を求めよ .