線形代数

平面上に n 個の点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ が与えられており，$i \neq j$ のとき $x_i \neq x_j$ が成り立つとする。このとき，

命題　これら n 個の点を通る $n-1$ 次関数 $y = a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ がただ１つ存在する。

が成り立つ。この命題について，次の問に答えよ。

(1) 関数 $y = a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ が $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ を通るという条件を，$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ に関する連立一次方程式として表せ。

(2) $n = 2$ の場合に問(1)の連立一次方程式を解け。

以下では，$n \times n$ 行列 V_n を

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

と定義する。

(3) $\det V_3$ を求めよ。

(4) 問(3)の結果を使い，$n = 3$ の場合に命題が成り立つことを証明せよ。

(5) $\det V_4$ を求め，それを用いて $n = 4$ の場合に命題が成り立つことを証明せよ。
（ヒント： $\det V_4$ において第 i 列から第 $i-1$ 列の x_1 倍を引くという操作を $i = 4, 3, 2$ の順に施せ。）